CALCUL NUMERIQUE ET ALGEBRIQUE — 2de

I Identités remarquables

Développer une expression algébrique, c'est la réécrire sous la forme d'une somme (ou d'une différence) de plusieurs termes. On utilise pour cela la **distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition ou les **identités remarquables.**

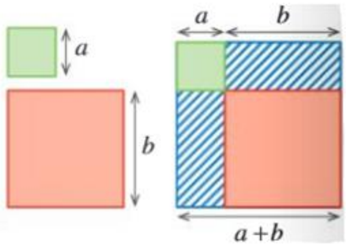
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad (a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Factoriser une expression algébrique, c'est la réécrire sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs. C'est le contraire du développement.

Propriétés *Les identités remarquables*

Démonstration ***exemplaire*** *de la 1re égalité de façon géométrique*

On considère un carré vert de côté a et d'aire a^2, un carré rouge de côté b et d'aire b^2, et un carré bleu de côté $a + b$ et d'aire $(a + b)^2$.
En pavant le carré bleu avec les carrés vert et rouge, on peut constater qu'il reste deux rectangles non occupés de largeur a et de longueur b (donc d'aire $a \times b$).
En additionnant les aires correspondantes, on en déduit :
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.



Remarques

1) Ne pas confondre :

2) Pour factoriser, si aucun facteur n'est détecté, penser aux identités remarquables (voir exemple 4)) ou tenter des factorisations intermédiaires c'est-à-dire factoriser localement avant de le faire globalement (voir exemple 5).

3) **Attention**, lors d'une factorisation, un terme isolé peut toujours s'écrire comme un produit :

Exemples

1) Développer $A = (x - 2)^2 + 4$.

2) Développer $B = (x - 3)(x + 3) + (2x - 1)^2$.

3) Factoriser $C = x(2x+1) + (2x+1)(x+3)$.

4) Factoriser $D = x^2 + 2x + 1$.

5) Factoriser $E = (x^2 - 1) - 2(3x - 3)$.

II Calcul numérique

2.1 Calculer avec des fractions

Propriétés

Exemples

Calculer et simplifier au maximum :

$F = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{25}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{-2}{5} \times \frac{15}{18}$

$G = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - \frac{3}{5}}{-\frac{3}{7} + 4}$

2.2 Calculer avec des puissances

Définition *Puissance*

On a les propriétés de calculs suivantes :

Propriétés

Exemples

Calculer et simplifier au maximum :

$H = \frac{1}{2^2} \times 4^{-3}$

$I = \frac{5^2 \times 10^2}{5^3 \times 2^4}$

$J = (ab^2)^{-1} \times (a^2 b)^2$

2.3 Calculer avec des racines carrées

Définition *Racine carrée*

Remarques

Exemples

Racines carrées à connaître

Remarque
Les nombres sous les radicaux sont appelés des carrés parfaits (c'est le résultat du carré d'un entier).

Propriétés

Démonstration de (i)

Exemples
1) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$. Au préalable dans ce type de simplification, c'est de faire apparaître un carré parfait.
De même, en mettant sous la forme $a\sqrt{b}$, où *a* et *b* sont des entiers mais avec *b* le plus petit possible (c'est-à-dire ne contenant pas de carrés parfaits), on a
2) Simplifier $K = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$. **Attention** : pour additionner des racines carrées, celles-ci doivent avoir le même nombre sous le radical.
3) Simplifier $L = \sqrt{1 + \frac{4}{5}} \times \sqrt{3 + \frac{1}{5}}$:

4) Calculer et simplifier *M* = $\left(\sqrt{3} - 4\right)^2$. On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on pourrait le faire sur des expressions algébriques. Les radicaux sont alors « traités » comme l'inconnue.

Exercice 1
On pose $x = \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{6}\right)$ et $y = 2 - \sqrt{6}$.
1. Calculer x^2 puis y^2 en donnant les résultats sous la forme $a + b\sqrt{6}$ où a et b sont des entiers.
2. Calculer $x^2 + y^2$.

Deux méthodes pour enlever une racine carrée au dénominateur

- Si l'expression à simplifier est du type $\frac{a}{\sqrt{b}}$, il suffit de multiplier la fraction au numérateur et dénominateur par cette même racine carrée $\sqrt{b}$. Par exemple,
- Si l'expression à simplifier est du type $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$, il suffit de multiplier la fraction au numérateur et dénominateur par $b - c\sqrt{d}$. Par exemple,

Exercice 2

Pour chacune des expressions ci-dessous, enlever la ou les racines carrée(s) au dénominateur.

$A = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ $\quad B = \frac{5}{1-\sqrt{2}}$ $\quad C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\quad D = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\quad E = \frac{1-\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$

Propriété

Démonstration ***exemplaire***

Exemple

III <u>Equations</u>

Définition

Propriétés *Rappels*
(i) Lorsque l'on ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.
(i) Lorsque l'on multiplie (ou divise) par un même nombre non nul aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.

Remarque

Exemples

1) Résoudre l'équation (E_1) : $4x + 1 = 2x - 9$

2) Résoudre l'équation (E_2) : $\frac{1}{3}x - x + 3x = \frac{2}{3}x + 9$

Lorsque l'on est en présence d'un produit de facteurs égal à 0, on utilise la propriété importante suivante :

Propriétés

Remarque
Les produits de facteurs ne sont pas toujours « visibles ». La méthode générale pour résoudre une équation est dans un 1er temps de la rendre équivalente à une équation du type $E(x) = 0$, puis de factoriser l'expression $E(x)$ et enfin d'utiliser une des propriétés précédentes. On appelle ce type d'équations, « équations-produit ».

Exemples
1) Résoudre l'équation (P_1) : $(3 - x)(2 + x) - (1 - x)(3 - x) = 0$

2) Résoudre l'équation (P_2) : $(2x - 1)\left(-\frac{1}{2}x - 1\right) = -\frac{1}{2}(2x - 1)^2$

Propriété

Démonstration

Exemples

1) Résoudre $x^2 = 81$

2) Résoudre $x^2 + 4 = 0$

3) Résoudre $x^3 - 3x = 0$.

Exercice 3

Soit $A(x) = (4x+1)^2 - (6x-11)^2$ pour tout nombre x.

1. Développer et réduire $A(x)$.

2. Factoriser $A(x)$.

3. Démontrer que $A(x) = -20\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 125$.

4. Utiliser la forme la plus adaptée de $A(x)$ pour résoudre chacune des équations suivantes :

a) $A(x) = 0$ **b)** $A(x) = -120$.

c) $A(x) = 45$ **c)** $A(x) = -20x^2$

Voici une conséquence de la propriété (ii) (page 5) concernant les « équations-quotient » du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ où $Q(x) \neq 0$.

Propriété

Remarque

Pour certaines expressions dépendantes de x, il existe des valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression. Par exemple : $A(x) = \frac{x}{x-4}$;

Exemples

1) Résoudre l'équation quotient suivante (EQ_1) : $\frac{2x-8}{x^2} = 0$.

2) Résoudre l'équation quotient suivante (EQ_2) : $\frac{x-1}{x} + \frac{3x}{x+1} = 0$

Remarque

Dans le cas des « équations-quotient » du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = a$ où a est un nombre, on peut procéder par le produit en croix (voir exercice 3).

Exercice 4

Résoudre l'équation $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.