

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1

Exprimer les nombres suivants sous forme algébrique.

$$A = \left(\frac{1 - 2i}{1 + i} \right)^2$$

$$B = (1 - i)^5$$

$$C = \frac{2 + 2i\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}i}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera les solutions sous **forme algébrique**.

$$(E_1) : (3 + 2i)z + i - 5 = 3i$$

$$(E_2) : \frac{2z - 4\bar{z}}{2 - i} = 3$$

$$(E_3) : \bar{z} - 1 = z\bar{z} - i$$

Exercice 3

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \frac{z_n - 6}{1 + i}$

- Calculer z_1 puis z_2 . *Mettre sous forme algébrique.*
- On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = z_n - 6i$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
 - En déduire une expression de u_n puis de z_n en fonction de n .
- On considère la suite (t_n) la suite définie par $t_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $t_{n+1} = \frac{t_n - 6}{1 - i}$.
 - Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $t_n = \bar{z}_n$.
 - Sans avoir recours à un nouveau calcul, exprimer t_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Exercice 4

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $f(z) = \frac{2 - iz}{1 - z}$.

- Démontrer que $f(z)$ ne peut être égal à i .
- Soit Z un complexe différent de i . Déterminer, s'il(s) existent le(s) antécédent(s) de Z par f .

BONUS !

Soit n et p deux entiers naturels avec $n \geq p$, on pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$$

1. Calculer $S_{0,0}$, $S_{1,1}$ et $S_{2,2}$
2. Montrer que $\forall n \geq 1, S_{n,0} = 0$
3. On suppose dans cette question $p = 1$ et $n \geq 2$
Pour tout réel x , on pose $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k$
 - a) Justifier que $f(x) = (1-x)^n$
 - b) Déterminer alors deux expressions de $f'(x)$.
 - c) En déduire la valeur de $S_{n,1}$.

Barème indicatif

Ex 1 :

Ex 2 :

Ex 3 :

Ex 4 :

Bonus :