Sujet A

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 8 - 7u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 + 3 \times (-7)^n$.

Exercice 2

Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Déterminer la forme factorisée de P.

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=3}^{n} (2k+4), \text{ pour } n \geq 3$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{3k+2}}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 4

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.
2. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

Corr ex 3

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n}(2k+4) &= 2\sum_{k=3}^{n}2k-\sum_{k=3}^{n}4 \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{n}k-(0+1+2)\right)-(n-2)\times 4 \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}-3\right)+4(n-2) \\
&= n(n+5)-14
\end{aligned}
$$