Sujet B

Exercice 1

Soit P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2. Démontrer le résultat :

$$\left.\begin{array}{l} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[x] \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x)=(x-1)^2 Q(x)$$

Exercice 2

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$.

Montrer que $u_n = \frac{n}{3^n}$.

2. Soit (u_n) tel que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k^2 + k + 2)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{-1}{3^k},\ \text{pour } n \geq 2$$

Corr ex 1

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$.

- Sans problème, on a alors $P(1) = 0$.
- De plus, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

D'où :

$$P'(1) = 0$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
Par théorème de factorisation, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q_1(x)$.
Mais P est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = Q_1(x) + (x-1)Q_1'(x)$$

Or $P'(1) = 0$. On obtient alors : $Q_1(1) = 0$. 1 est donc racine de la fonction polynomiale Q_1... Par conséquent, d'après le théorème de factorisation, il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q_1(x) = (x-1)Q_2(x)$.
On obtient ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)^2 Q_2(x)$$

On a ainsi établi :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[x] \,/\, \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)^2 Q(x)$$