Sujet C

Exercice 1

1.

Soit $x \geqslant -1$ un réel fixé. Démontrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $(1+x)^k \geqslant 1+kx$.

2.

Soit la suite (u_n) telle que : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3} = 1 - \dfrac{1}{u_n - 3}$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n < 2$.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n} + 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{6}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

Exercice 3

Pour n entier strictement positif,

on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

a) Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

b) En déduire la valeur de S_n.

Exercice 4

Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Factoriser le plus possible f. On pourra d'abord mettre formellement x^2 en facteur puis utiliser le changement de variable $t = x + \frac{1}{x}$ (et faire t^2).