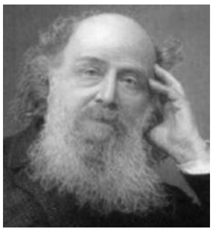
Histoire des maths

Introduction

Le mot « matrice » vient du latin « mater » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ». Au début de l'imprimerie, « matrice » désignait le moule à imprimer sur lequel on plaçait les caractères. Au II^{e} siècle av. JC, on trouve en Chine, dans *Les neufs chapitres sur l'art mathématique*, des tableaux de nombres utilisés pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. C'est le même problème qui amène Bézout (1730-1783) et Vandermonde (1735-1796), deux mathématiciens français, à fournir des méthodes de résolutions dépendant des coefficients. Au milieu du siècle suivant les mathématiciens anglais Sylvester et Cayley comprennent l'importance de l'utilisation de tels tableaux. Le 1er leur donne le nom de *matrice* mais c'est le 2nd qui leur octroie un vrai statut en définissant des opérations. Cayley présente ces notions dans un mémoire publié en 1858 et dans lequel sont démontrés d'importants théorèmes.

James Sylvester



Le frère aîné de James Joseph revient des Etats-Unis avec le pseudonyme de Sylvester ; pour une raison obscure, ce nom est adopté par toute la famille. James Sylvester entre au Saint-John's College de Cambridge en 1831. Une longue maladie l'oblige à interrompre sa scolarité à plusieurs reprises entre 1833 et 1834. Retrouvant la santé, il passe en 1837 l'examen de fin d'études. Reçu 2nd, il n'est pas diplômé par l'université : pour l'être, il aurait dû affirmer son appartenance à l'Eglise d'Angleterre ; or il est juif, et il ne veut se soumettre à une semblable obligation. De 1838 à 1840, il enseigne la physique à l'université de Londres, obtenant l'un des rares postes que sa religion lui permettrait d'occuper. Il se rend ensuite aux Etats-Unis, à l'université de Virginie à Charlottesville. Après une dispute avec des étudiants, il revient en Angleterre et devient actuaire pour une compagnie d'assurances. Sa pratique des mathématiques se limite alors à produire des leçons particulières : Florence Nightingale[1] est son élève la plus célèbre. Il entre au barreau en 1850, et y rencontre Cayley : les 2 hommes partagent leur passion commune pour les mathématiques. Il redevient enseignant en 1855, comme professeur de mathématiques à l'Académie militaire royale de Woolwich. En 1870, il retourne aux Etats-Unis, à l'université Johns Hopkins de Baltimore. Commence alors la période la plus fructueuse de sa carrière. Il fonde en 1878 l'*American Journal of mathematics*, dont il est le 1er rédacteur en chef. Il invite souvent Cayley pour des conférences. Sylvester donne une impulsion décisive au développement des mathématiques d'outre-Atlantique. A son retour en Angleterre, il obtient une chaire à Oxford.
Sylvester est un homme bien bâti, sensible et passionné, et il expose ses idées avec enthousiasme. Cependant, son caractère irascible lui vaut de nombreuses inimitiés. Il n'aime pas lire les travaux des autres mathématiciens, sa mémoire est défaillante, et ses cours sont souvent improvisés, mais d'une manière parfois géniale : il lui arrive de prouver des résultats nouveaux.
Sylvester se passionne pour la poésie On lui doit un ouvrage de versification et un certain nombre de poèmes, en particulier *Rosalind*, œuvre de 400 vers qui riment tous avec le nom de l'héroïne. Il s'intéresse également à la musique ; il suit même des cours dispensés par Gounod[2].
Les 1ers travaux de Sylvester portent sur une analyse mathématique de la théorie optique de Fresnel. Sa rencontre avec Cayley l'oriente vers les théories algébriques nouvelles qui se développent à ces époques : Matrices, déterminant, théorie des invariants, réduction des formes quadratiques… Il s'intéresse également à la théorie des nombres et à celle des probabilités. Bien que ses travaux soient souvent incomplets, parfois erronés, toujours mal achevés, Sylvester a une aptitude à l'abstraction qui l'amène à généraliser des problèmes concrets.

Arthur Cayley

Arthur Cayley, bien que né en Angleterre, passe les 8 premières années de sa vie à Saint-Pétersbourg, ville où ses parents font du commerce. De 1838 à 1849, il étudie les mathématiques et le droit au Trinity College de Cambridge. Devenu avocat en 1849, il obtient enfin 1863, une chaire de mathématiques pure à Cambridge et il peut alors se consacrer à sa passion. Il fait toute sa carrière à Cambridge, si l'on excepte une année passée à l'Université de Johns Hopkins (1881-1882). Cayley semble avoir toutes

[1] Florence Nightingale (1820-1910) est une infirmière anglaise, pionnière des soins infirmiers modernes et de l'utilisation des statistiques dans le domaine de la santé. Elle organisa des hôpitaux militaires de campagne pendant la guerre de Crimée, la guerre de Sécession et la guerre franco-allemande de 1870-1871, et développa la formation du personnel hospitalier.
[2] Charles Gounod (1818-1893) est un compositeur français, célèbre pour son opéra *Faust*.

les vertus possibles : une gentillesse reconnue par tous, une mémoire hors du commun, des aptitudes sportives supérieures et des dons artistiques (il peint des aquarelles). Esprit romanesque et polyglotte, il dévore plus de mille romans, en anglais bien sûr mais aussi en français, en grec, en allemand et en italien ; il en écrit même quelques-uns. Sportif et passionné d'escalade en montagne, Cayley se rendait souvent sur le continent pour assouvir sa passion. Il expliquait que, bien que l'ascension d'un sommet lui soit souvent difficile et pénible, un sentiment d'exaltation s'emparait de lui, une fois le but atteint. Il le comparait à celui obtenu lorsqu'il résolvait un problème mathématique délicat ou achevait une théorie compliquée.
Les travaux mathématiques de Cayley concernent tous les domaines, mais surtout la géométrie, l'algèbre linéaire, les fonctions elliptiques et la théorie des invariants. Cayley est sans doute, après Euler et Cauchy le plus prolixe des mathématiques : des œuvres complètes comportent 970 articles remplissant 13 volumes de 600 pages. Cayley est souvent considéré comme l'inventeur des matrices. Lorsqu'il les introduit en 1841, le déterminant existe déjà, noté en tableau depuis 1815 à l'initiative de Cauchy, Cayley y ajoute seulement deux barres. Il se contente d'étudier les matrices carrées d'ordre 2 et 3 mais il affirme que toutes les notions introduites et tous les résultats obtenus s'étendent aux matrices rectangulaires. Il définit les opérations de base sur les matrices (somme, produit, inverse)

D'après « Des mathématiciens de A à Z », B. Hauchecorne-D. Suratteau, éditions Ellipses (2008)

I <u>Généralités sur les matrices</u>

Définition

Exemple

Remarque

Vocabulaire

Propriété

Démonstration admise

Exemple

II Opérations sur les matrices

Définition *Somme*

Exemple

Propriété

Démonstration admise

Définition *Produit d'une matrice par un réel*

Exemple

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C = 3A - 2B$.

2. Déterminer les matrices X de taille 3×2 alors que $2X + C = A$.

Propriétés

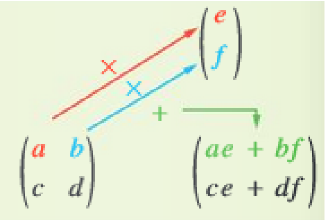
Démonstration admise

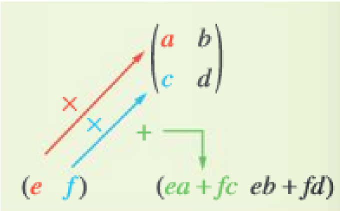
Définition *Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne*

Remarques

Exemple

Dispositions à retenir sur deux exemples





Définition *Produit de deux matrices quelconques*
Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille de $n \times p$. Le produit des matrices A et B, noté $A \times B$ (ou AB), est la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}}$ de taille $m \times p$ telle que, pour tous $1 \le i \le m$ et $1 \le j \le p$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj} \text{ où } A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \text{ et } B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Remarques

1) Cette formule n'est pas à connaître par cœur mais c'est la **méthode de calcul** qui est à comprendre et connaître.

2) **Attention,** le produit $A \times B$ est défini lorsque **le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.**

Méthode de calcul sur un exemple

Remarque

Propriétés

Démonstration admise

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$. En montrant que $M \times M = 3M$, en déduire $M \times M \times M$.

Définition *Puissance n-ième d'une matrice carrée*

Remarque

Exemples

Utilisation de la calculatrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $A \times B = \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ -13 & -17 \end{pmatrix}$

Voici les procédures selon les modèles calculatrices pour calculer le produit $A \times B$:

Commentaires	TI	Casio	NumWorks
• On saisit les coefficients des matrices	matrice ▶ ▶ (EDIT) entrer 2 entrer 2 entrer Taper les coefficients de A et entrer à chaque fois. 2nde mode (quitter) Recommencer pour entrer la matrice B.	MENU 1 F3 (▶MAT/VCT) 2 EXE 2 EXE EXE Taper les coefficients de A et EXE à chaque fois. EXIT ▼ Recommencer pour entrer la matrice B. EXIT	Calculs EXE shift [(e^x A) Taper les coefficients à l'aide des flèches de déplacements. Puis, juste après avoir saisi le dernier nombre, on nomme la matrice. ▷ ▷ shift sto→ (x^y F) shift alpha [(e^x A) EXE Recommencer pour entrer la matrice B.
• On calcule A × B	matrice 1 ([A]) × matrice 2 ([B]) entrer	OPTN F2 (▶MAT/VCT) F1 (Mat) ALPHA X,θ,T (A) × F1 (Mat) ALPHA log (B) EXE	shift alpha [(e^x A) × shift alpha [(ln B) EXE

On peut utiliser la calculatrice pour calculer des puissances n-ème, de matrice :

D'après l'exemple 2), on a la propriété suivante :

Propriété

Démonstration admise

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^2, A^3 et A^4.

2. Conjecturer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

III Matrice inverse et résolution de système

Notation L'ensemble des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n est notée $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition et propriété

Démonstration admise

Exemple

Remarques

Exercice 4

Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que A vérifie l'égalité $A^2-5A+4I=0$.
2. En déduire que A est inversible et en déduire A^{-1}.

Comme on va le voir ci-dessous, toutes les matrices ne sont pas inversibles. En effet :

Propriété

Démonstration

Soit $B=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Alors $A\times B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=(ad-bc)I_2$.

Si $ad-bc\neq 0$, on a $\frac{1}{ad-bc}A\times B=I_2$ soit $A\times\left(\frac{1}{ad-bc}B\right)=I_2$ donc A est inversible.

Si $ad-bc=0$, alors $A\times B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ donc A n'est pas inversible. Car si A était inversible d'inverse la matrice C, on aurait $C\times A\times B=I_2\times B=B$ et $C\times A\times B=C\times\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Et donc $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Ce qui est impossible.

Méthode de calcul d'une matrice inverse (*sans calculatrice*)

Propriété

Démonstration en exercice (voir le n°60 p 195)

Exemple

Propriété

Remarque

Pour les matrices carrées d'ordre n tel que $n \geq 3$, il existe un moyen de calculer le déterminant à l'aide d'une formule (voir p 234). Cette année, on utilisera la méthode précédente et la calculatrice.

Propriété

Démonstration admise

On a la propriété suivante qui va permettre de résoudre des systèmes linéaires :

Propriété

*Démonstration – **La comprendre** car elle permet de retrouver facilement la formule*

Application – Résolution de système linéaire

Propriété

Démonstration

Elle découle de la propriété précédente.

Remarque
Si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Exemple

IV Suites de matrices colonnes

Introduction – Quelques exemples de suites de matrices

4.1 Terme général des suites du type : « $U_{n+1} = AU_n$ »

Propriété

Démonstration en exercice

Remarque
Formule analogue déjà connue sur les suites géométriques.

Exemple

Exercice 5

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -42 & 23 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = PDQ$.

2. Calculer QP.

3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kQ$.

4. Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la forme explicite de A^k en fonction de k.

5. On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -16u_n + 9v_n$ et $v_{n+1} = -42u_n + 23v_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer X_0 et démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_0$.

b. Déterminer X_n en fonction de n puis en déduire les expressions de u_n et v_n.

4.2 Terme général des suites du type : « $U_{n+1} = AU_n + B$ »

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, (U_n) la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ et B une matrice colonne de taille $k \times 1$. $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = Au_n + B \end{cases}$. Voici la méthode générale qui est **à connaître** :

Remarque

Il existe une autre méthode pour déterminer une expression de U_n en fonction de n.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = AU_{n-1} + B = A(Au_{n-2} + B) + B = A^2U_{n-2} + AB + B = \cdots$

Par récurrence, on démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = A^nU_0 + (A^{n-1} + \cdots + A + I_k)B$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = A^n + \left(\sum_{p=0}^{n-1} A^p\right) B.$$

Exemple

4.3 Limites de suites de matrices

Définitions

Exemples