ENSEMBLES ET NOMBRES 2^{de}

I Ensembles de nombres

1.1 Nombres entiers naturels

Définition

Notations

Exemples

Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$1\,527 \ldots \mathbb{N}$ $\quad -3 \ldots \mathbb{N}$ $\quad 0 \ldots \mathbb{N}$ $\quad \pi \ldots \mathbb{N}$ $\quad \frac{3}{4} \ldots \mathbb{N}$ $\quad 2^7 \ldots \mathbb{N}$ $\quad \frac{9}{3} \ldots \mathbb{N}$

1.2 Nombres entiers relatifs

Définition

Notation

Un peu d'histoire des maths

La notation $\mathbb{Z}$ provient de l'allemand « Zahlen », qui signifie « nombres ». C'est le groupe de mathématicien Nicolas Bourbaki qui en est à l'origine en 1935.

Exemples

Vrai ou Faux ?

- si $n \in \mathbb{N}$ alors $n \in \mathbb{Z}$ $\quad \ldots$ • si $n \in \mathbb{N}$ alors $-n \in \mathbb{Z}$ $\quad \ldots$ $\quad 0 \in \mathbb{Z}$ $\quad \ldots$
- si $n \in \mathbb{Z}$ alors $-n \in \mathbb{N}$ $\quad \ldots$ • si $n \in \mathbb{N}$ alors $-n \notin \mathbb{N}$ $\quad \ldots$ $\quad -3{,}5 \in \mathbb{Z}$ $\quad \ldots$

Remarque

On parlera généralement d'entiers c'est-à-dire de nombres entiers relatifs quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

1.3 Quelques notions d'arithmétique

Définition

Exemples

Propriété

Démonstration ***exemplaire***

Définitions

Exemples

Remarques

Propriété

Démonstration ***exemplaire***

Propriétés *Critère de divisibilité*

1.4 Nombres décimaux et rationnels

Définition

Exemples

Compléter par $\in, \notin, \subset, \not\subset$

$2{,}1 \quad \mathbb{D}$ $\qquad 0{,}3333 \quad \mathbb{D}$ $\qquad \frac{1}{5} \quad \mathbb{D}$ $\qquad \sqrt{3} \quad \mathbb{D}$ $\qquad \mathbb{Z} \quad \mathbb{D}$ $\qquad \mathbb{D} \quad \mathbb{N}$

Définition

Remarques
1) La notation $\mathbb{Q}$ est due au mathématicien italien Giuseppe Peano (pour *quoziente*) en 1888.
2) Un nombre rationnel est un nombre que l'on comprend au sens décimal (suite logique de nombres après la virgule). La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.

Exemples

Propriété

Démonstration **exemplaire**

1.6 <u>Nombres réels</u>

Définition

Vocabulaire
On dit aussi « réel » au lieu de « nombre réel ».

Définition

Exemples

Remarque
Comme pour un nombre rationnel, il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. En effet, le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ces décimales se suivent sans suite logique.

Propriété

*Démonstration **à comprendre***
Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel c'est-à-dire que $\sqrt{2} = \frac{n}{d}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ avec n et d n'ayant aucun facteur en commun. On obtient $2d^2 = n^2 (*)$. Ce qui veut dire que n^2 est pair. Or, la contraposée

(cf annexe logique) de la propriété suivante : « Si a^2 est un nombre pair alors a est pair » est « Si a est impair alors a^2 est impair » propriété que l'on a démontrée page 2. Cela implique donc que n est pair. Donc $n = 2k$ où k est un entier et si l'on remplace dans (*), on obtient $2d^2 = 4k^2 \Leftrightarrow d^2 = 2k^2$. D'où d^2 pair et d'après ce qui précède, d pair. Or, c'est absurde puisque d et n sont pairs (ils ont des facteurs en commun). On conclut que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Histoire des mathématiques

L'école pythagoricienne fut un courant philosophique fondé par Pythagore de Samos au VI^e siècle avant notre ère, qui considérait que les nombres étaient l'origine de toutes choses. Les pythagoriciens pensaient que tout nombre peut s'exprimer par le quotient de deux entiers naturels. Un des pythagoriciens, Hippase de Métaponte, en essayant de calculer le rapport entre la diagonale d'un carré et un de ses côtés, démontra que c'était un nombre « incommensurable » (non rationnel) : la racine carrée de 2. Il existe plusieurs versions de ce qui advient d'Hippase, car sa découverte provoqua une division profonde au sein de l'école Pythagoricienne. Parmi les récits qui circulent sur sa fin (dont aucun ne finit bien), le plus connu raconte qu'on le jeta à la mer, et qu'il périt noyé.

Propriété

Remarque
On parle aussi « d'encadrement d'amplitude 10^{-n} ».

Exemples

Bilan

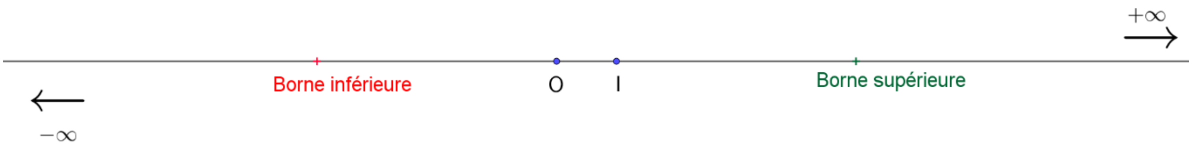
II Intervalles

2.1 Intervalles de $\mathbb{R}$

L'objectif de ce paragraphe est de définir une notation simple pour désigner certaines parties de $\mathbb{R}$.

On rappelle les notations suivantes à lire de gauche à droite : « $<$ » : est strictement inférieur à, « $>$ » : est strictement supérieur à, « $\leq$ » : est inférieur ou égal à, « $\geq$ » : est supérieur ou égal à

Principe
Un intervalle est un ensemble de nombres délimité par deux nombres réels, l'un constituant la borne inférieure et l'autre la borne supérieure de l'intervalle. Il contient donc tous les nombres réels contenus entre ces deux bornes.
Pour représenter $\mathbb{R}$, on utilise un axe $(O; I)$: O point origine, d'abscisse 0 et I point unité d'abscisse 1.



Exemple
L'ensemble des nombres compris entre -4 et $\frac{14}{3}$ forme un intervalle.

Notation – A propos de l'infini
L'axe des réels n'a pas, à proprement parler, d'extrémité puisqu'il n'existe ni un nombre réel plus grand que tous les autres, ni un plus petit que tous les autres ($0{,}0001$ n'est pas « petit » : $-10\ 000\ 000$ situé très très loin à gauche sur l'axe, est infiniment plus « petit » que lui !).
Pour des raisons de commodité, on utilise le symbole $+\infty$ (un huit couché) qui se lit « plus l'infini » pour désigner un point virtuel obtenu par un déplacement perpétuel vers la droite sur l'axe des réels. De même, on notera $-\infty$, pour désigner un point virtuel obtenu par un déplacement perpétuel vers la gauche sur l'axe des réels.
Ce symbole ∞ ne représente pas un nombre mais plutôt un concept qui traduit la non finitude de l'ensemble des nombres réels. Il n'est pas question de l'utiliser dans des opérations d'addition, de multiplication…
En tant que borne d'un intervalle et au vu de son statut particulier, il sera toujours associé à un crochet ouvert.

Le tableau ci-dessous présente tous les intervalles que vous rencontrerez au lycée.

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Si le crochet « attrape » le nombre a, cela veut dire que a appartient à l'intervalle d'extrémités a et b. Si le crochet « tourne le dos » au nombre a, cela veut dire a n'appartient PAS à l'intervalle. Ainsi $a \in [a; b]$ mais $a \notin]a; b]$.

L'intervalle noté …	est l'ensemble des réels x tels que …	Il est représenté sur une droite graduée par un segment :
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	a b
	$a < x < b$	a b
$[a;b[$		a b
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	a b

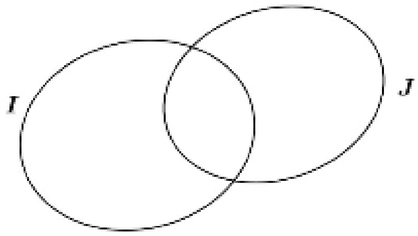
L'intervalle noté …	est l'ensemble des réels x tels que …	Il est représenté sur une droite graduée par un segment :
$[a;+\infty[$	$x \geqslant a$	a
$]a;+\infty[$		a
	$x \leqslant b$	b
$]-\infty;b[$		b

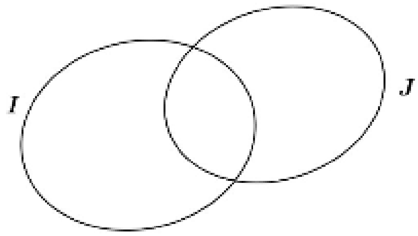
Remarque et notations

Exemples

2.2 Intersection et réunion

Définitions





Notation

Exemples

III Inégalités et inéquations

3.1 Inégalités

Propriétés

Remarque

Exemple

Propriétés

Exemple

3.2 Inéquations

Définition

Exemple

Remarque
On a une définition analogue pour les inéquations suivantes $A(x) \leq B(x), A(x) > B(x)$ et $A(x) \geq B(x)$.

Propriété

Exemple
Résoudre l'inéquation $4x + 2 \geq 2x - 4$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1

1. Soit a, b deux nombres strictement positifs. Comparer le réel $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et 2.

2. Même question lorsque a et b sont nuls et de signes contraires.

IV Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

Propriété

Exemples

Remarque

Propriétés

Exemples

Définition

Remarque

Propriété

Démonstration
(i) Supposons que $a > b$, alors $d(a,b) = a - b$ et $|a-b| = a - b$ donc $d(a;b) = |a-b|$.
(ii) Supposons que $a \leq b$, alors $d(a,b) = b - a$ et $|a-b| = -a + b = b - a$ donc $d(a;b) = |a-b|$.
Dans tous les cas, on a $d(a;b) = |a-b|$.

Propriété

Démonstration admise

Exemple

Remarque

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs des réels x vérifiant les égalités suivantes.

$|2x+1| = 7$ $\qquad$ $|3-x| = 8$ $\qquad$ $|5-2x| = 1$