

Thème : Matrices

15/12/23

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

- Déterminer la matrice X telle que $AX = B$.
- Déterminer la matrice X telle que $CX = 0_2$.

Exercice 2 Deux raisonnements par récurrence...

1. Soit les matrices $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

En convenant de noter : $A = aI_2 + bN$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bN$.

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $B^2 = 3B - 2I_3$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = (2^n - 1)B - (2^n - 2)I_3$.

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
- En déduire que la matrice A est inversible puis exprimer A^{-1} en fonction de A.

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer a et b tels que $A^3 = aA + bA^2$.
- En raisonnant par l'absurde, démontrer que la matrice A n'est pas inversible.

BONUS !

Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et une matrice N appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$.
2. En déduire alors que N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.
3. Démontrer que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions N_1 et N_2 .

Barème indicatif **Ex 1 :** **Ex 2 :** **Ex 3 :** **Ex 4 :** **Bonus : 3**