Histoire des mathématiques

Le plan : « Surface telle qu'une droite qui y a deux points y est entièrement contenue ». Dictionnaire Hachette.

En inventant le système de coordonnées, le mathématicien René Descartes (1596-1650) originaire de Touraine crée la géométrie analytique, c'est-à-dire l'étude des figures par le calcul. A l'âge de 10 ans, il part étudier au collège de la Flèche (tenu par des jésuites à l'époque et qui deviendra le futur Prytanée).
En 1614, Descartes s'engage comme volontaire dans l'armée du prince de Nassau, alors à Breda. C'est en fait un piètre soldat, sans cesse absorbé dans ses pensées mathématiques et philosophiques. Alors qu'il est en campagne sur le Danube, à Neuberg exactement, Descartes fait trois rêves dans la nuit du 10 novembre. Ce sont des rêves qui, prétend-il, lui donnent ses premières idées en géométrie analytique et en philosophie.
Il écrit *Le Monde* de 1629 à 1633, ouvrage qui tente de donner une théorie physique de l'univers. Cependant, l'hostilité de l'Eglise le pousse à ne pas insister dans ce domaine. En 1637, il publie *Le Discours de la méthode* et ses trois appendices, *La dioptrique, Les météores* et *La géométrie*, où sa découverte de la géométrie analytique se trouve exposée. Il se consacre ensuite à la philosophie. Sollicité en 1649 par la reine Christine de Suède, à Stockholm, il y meurt l'année suivante d'une inflammation pulmonaire.
L'apport fondamental de Descartes en mathématiques est l'introduction de la géométrie analytique. Après avoir tracé deux axes perpendiculaires, il remarque que tout point du plan est déterminé par ses distances algébriques x et y aux axes. Une courbe est alors définie par une équation de la forme $f(x, y) = 0$. Il affirme qu'on obtient un résultat similaire en dimension 3, mais il se limite au plan. Pour définir une courbe par une propriété géométrique, il suffit d'exprimer une relation qui lie ses coordonnées ; on trouve une équation qui contient implicitement toutes les propriétés de la courbe. Il ramène ainsi l'étude de l'intersection de deux courbes à la résolution d'un système d'équations. Descartes s'intéresse à l'obtention de la tangente à une courbe, qu'il définit comme *limite de la sécante* (sera vue en spécialité maths – 1re).
Descartes rationnalise l'utilisation des lettres en mathématiques, il choisit celles du début de l'alphabet pour les quantités connues (a, b, c ...), celles de la fin pour les inconnues ($x, y, z, \ldots$). Cette habitude perdure !
On lui doit des résultats en optique dans *Le dioptrique* et une explication des phénomènes atmosphériques dans *Les Météores*.
L'œuvre philosophique de Descartes est fondamentale et influence tout le développement des sciences. Elle souligne que l'essence de la science se trouve dans les mathématiques.

Ce qu'il dit des mathématiques :

« *Je me plaisais surtout aux mathématiques à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons… je m'étonnais de ce que leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avait rien bâti de plus relevé* ».

Œuvres

- *Le Monde* (1629-1633)
- *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637)
- *Principia philosophae* (1644)

I Compléments de géométrie plane

1.1 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition

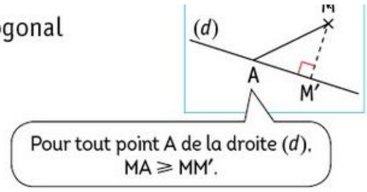
Propriété

*Démonstration **exemplaire***

On considère une droite (d), un point M et M′ le projeté orthogonal du point M sur la droite (d).

- **1^er^ cas :** si M appartient à (d).

Alors M′ est confondu avec M et dans ce cas, $MM' = 0$.
M′ est donc bien le point de (d) le plus proche du point M.



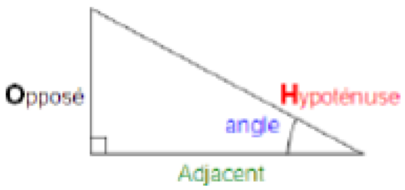
- **2^e^ cas :** si M n'appartient pas à (d). Soit A un point quelconque appartenant à (d) distinct de M′. Le triangle MM′A est rectangle en M′. Le plus grand côté d'un triangle rectangle est l'hypoténuse, donc $MA > MM'$ pour tout point A de (d) distinct de M. Donc $MA \geqslant MM'$ pour tout point A de la droite (d).

Le point M′ est donc bien le point de (d) le plus proche du point M.

1.2 Trigonométrie du triangle

Quelques rappels

Dans un triangle rectangle :



$$\text{Cos (angle)} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Sin (angle)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\text{Tan (angle)} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$$

Propriétés

Démonstration ***(ii) exemplaire*** – *(i) et (iii) sont admises*

Exemple
Reprenons la figure de ci-dessus. Soit θ un angle tel que $\cos(\theta) = 0{,}5$. Déterminons $\sin(\theta)$.

Exercice 1
ABCD est un rectangle tel que $\cos(\widehat{DAC}) = \frac{60}{109}$.
1. Déterminer la valeur de $\sin(\widehat{DAC})$.
2. Si DA=12 cm, déterminer la longueur de la diagonale [AC] en utilisant le $\cos(\widehat{DAC})$, puis tracer le rectangle ABCD.

1.3 Quadrilatères – Rappels

Définition *Parallélogramme*
Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Propriétés *Parallélogramme*
(i) Un quadrilatère est un parallélogramme, si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu.
(ii) Un quadrilatère est un parallélogramme, si, et seulement si, il est non croisé et a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.
(iii) Un quadrilatère est un parallélogramme, si, et seulement si, il est non croisé et a les côtés opposés deux à deux de même longueur.

Définition *Rectangle*
Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Propriétés *Rectangle*
(i) Un quadrilatère est un rectangle si, et seulement si, c'est un parallélogramme avec un angle droit.
(ii) Un quadrilatère est un rectangle, si, et seulement si, c'est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.
(iii) Un quadrilatère est un rectangle, si, et seulement si, il a 3 angles droits.

Définition *Losange*
Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.

Propriétés *Losange*
(i) Un quadrilatère est un losange si, et seulement si, ses diagonales sont perpendiculaires en leur milieu.
(ii) Un quadrilatère est un losange, si, et seulement si, c'est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.

Définition *Carré*
Un carré est à la fois un rectangle et un losange. C'est-à-dire que c'est un quadrilatère qui possède 4 angles droits et 4 côtés de même longueur.

II Repères et coordonnées

2.1 Repères

Définitions

Remarque

Définitions

Remarque

Dans la suite du cours, sauf mention contraire, le plan est muni d'un repère quelconque $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2.2 Coordonnées de vecteur

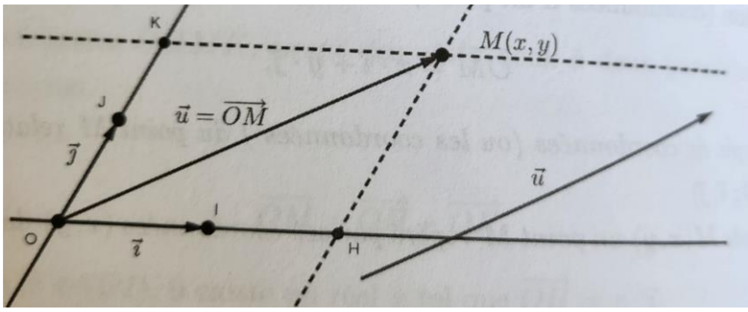
Théorème - Définition

Démonstration admise

Théorème - Définition

Démonstration en exercice

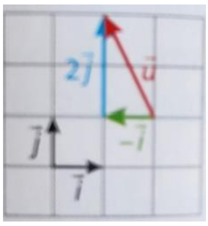
Il suffit d'utiliser le théorème précédent, en disant qu'il existe un unique point M du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.



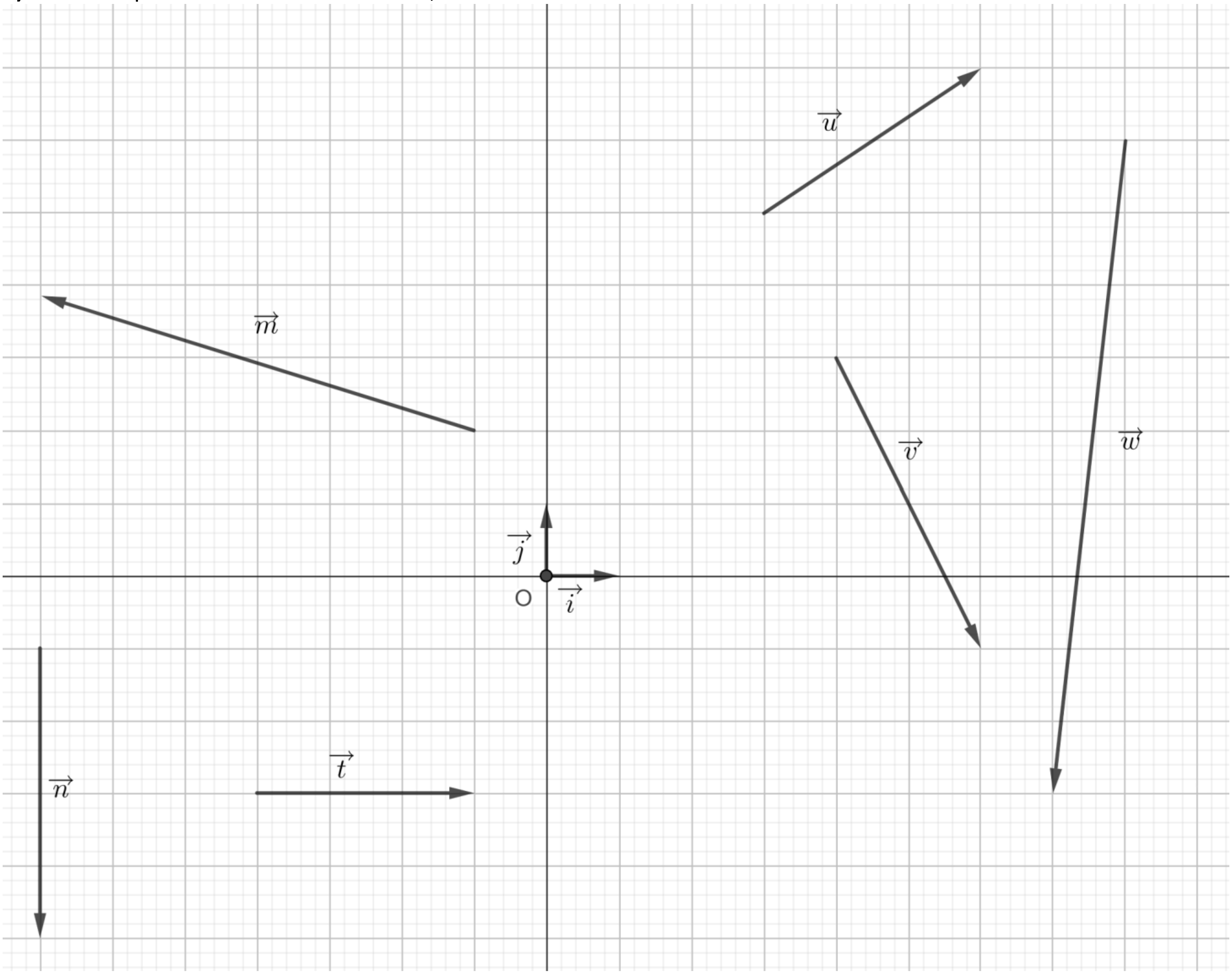
Remarques

Exemples

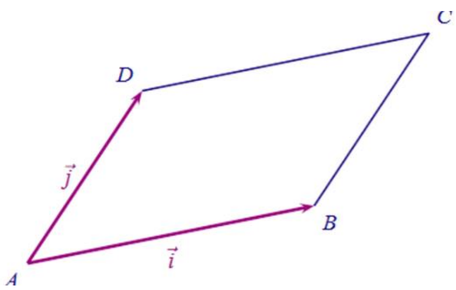
1) Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ci-dessous, on a :



2) Dans le repère orthonormé ci-dessous, déterminons les coordonnées de tous les vecteurs :



3) Soit ABCD un parallélogramme ci-dessous.



Propriétés

Démonstrations admises

Exemples

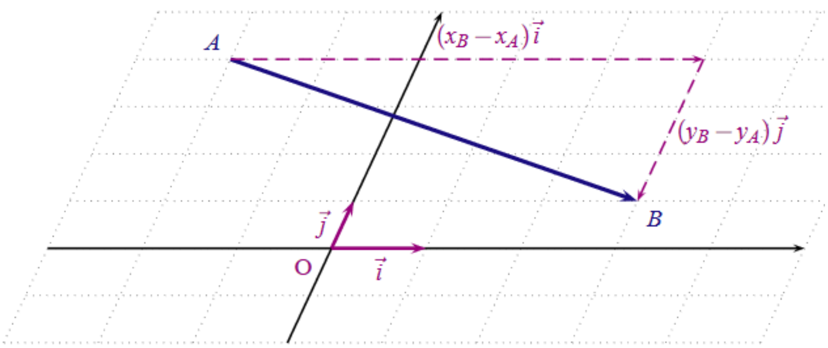
Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ tels que $3\vec{u}+2\vec{w}=6\vec{v}$.

2.3 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété



Remarque

Démonstration

D'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Exemple

III Milieu et norme

3.1 Milieu d'un segment

Propriété

Démonstration admise

Exemples

Exercice 3

Dans un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a placé les points $D(-2\ ;\ 1), E(3,3), F(1\,,-1)$ et $G(-4\,,-3)$.
Démontrer que le quadrilatère DEFG est un parallélogramme en utilisant la propriété précédente.

3.2 Norme d'un vecteur

Définition - Propriété *Norme d'un vecteur*

Démonstration en exercice

Exemple

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a placé les points $E(-3\ ;\ -2), F(-\frac{3}{2}\ ; \frac{5}{2})$ et $G(3\ ; 1)$. Démontrer que le triangle EFG est isocèle rectangle.

IV Colinéarité de deux vecteurs

Propriété *Condition de colinéarité*

Démonstration ***exemplaire***

Définition *Déterminant de 2 vecteurs*

Corollaire *Condition de colinéarité*

Exemples

Exercice 5

Soit ABCD un parallélogramme. A’ est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de [BC].

1. Déterminer les coordonnées des points A’, E et D dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2. Démontrer que les points A’, E et D sont alignés.

Figure