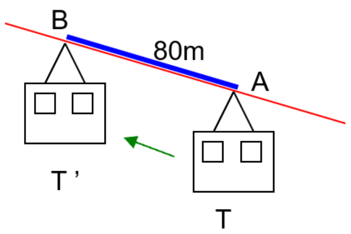
I Translation

Exemple introductif



Une translation est un glissement :

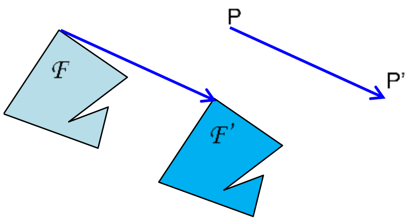
- avec une direction donnée :

- avec un sens donné :

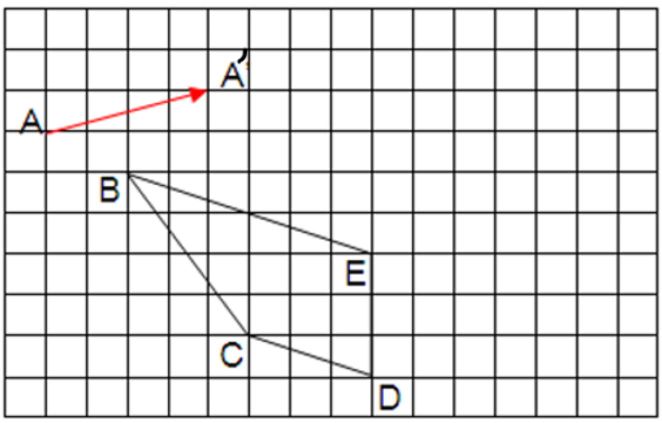
- avec une longueur donnée :

On dit que :

Définition



Exemple
Soit *t* la translation qui transforme A en A'.
Construisons l'image B'C'D'E' du trapèze BCDE par la translation *t* :



II Vecteurs du plan

2.1 Généralités

Définition *Vecteur*

Définition

Propriété

Démonstration en exercice

Exemple

Remarque

Un peu d'histoire des mathématiques

« Vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter). Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920. A l'origine des vecteurs, un italien, Giusto Bellavitis (1803-1880) les a désignés comme *segments équipollents.* Le mot « équipollent » provient du latin *aequipollens* qui signifie « qui a une valeur égale ».

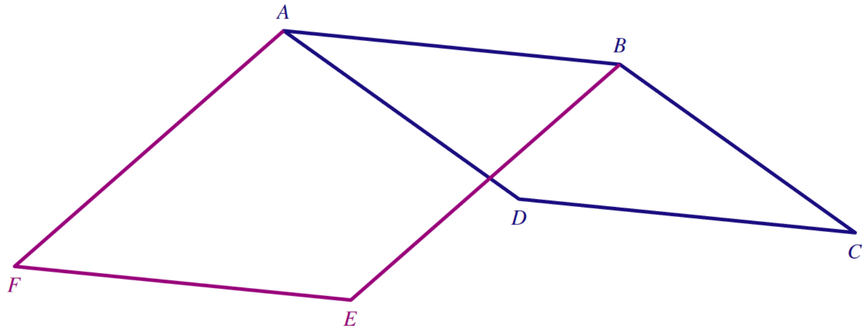
Propriété *Caractérisation d'un parallélogramme*

Attention à l'ordre des lettres !

Démonstration

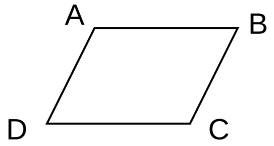
Exemple *Les trois parallélogrammes*

$ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Montrons que $DCEF$ est un parallélogramme.



Méthode de construction d'un point défini à partir de vecteurs

A partir du parallélogramme ABCD, nous allons construire les points E, F, G et H tels que :
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$.



Propriété *Caractérisation d'un milieu*

Démonstration en exercice

2.2 Vecteur nul et vecteurs opposés

Définition *Vecteur nul*

Remarques

Définition *Vecteurs opposés*

Exemple

III Somme de vecteurs

3.1 Définition

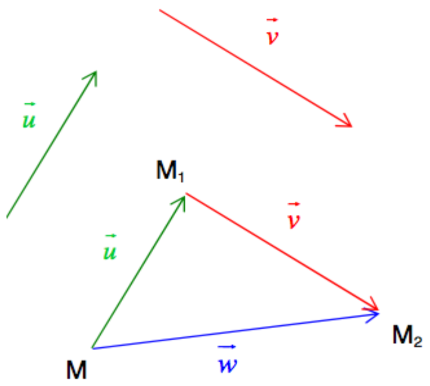
Exemple introductif

Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.
Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

$$M \overset{t_1}{\longmapsto} M_1 \overset{t_2}{\longmapsto} M_2$$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

$$M \overset{t}{\longmapsto} M_2$$



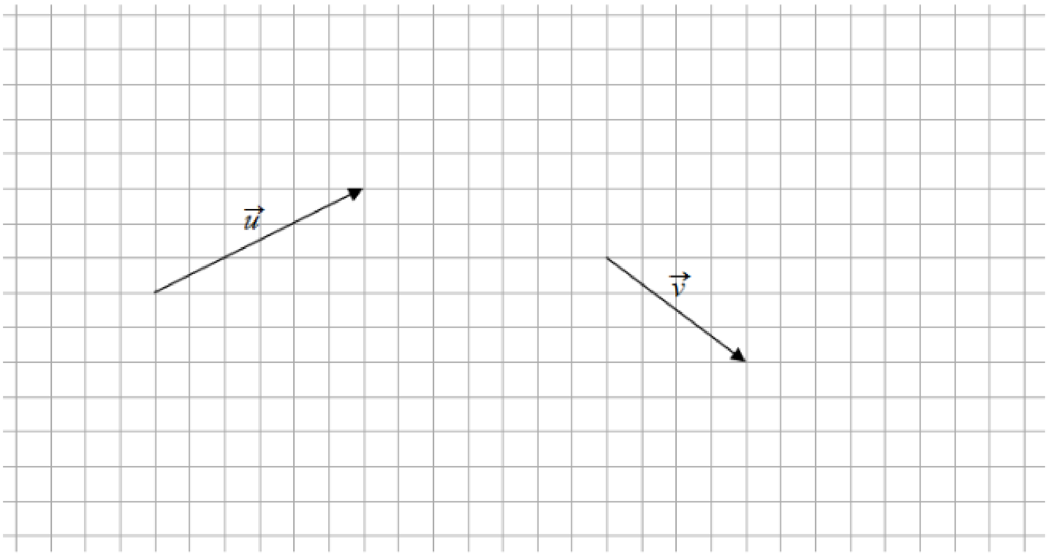
Propriété

Démonstration admise

Définition *Somme de deux vecteurs*

Remarques

Exemple
Construisons les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.

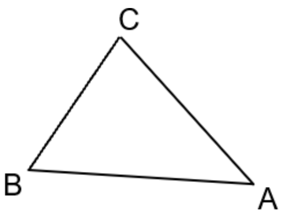


Remarque

Propriété *Autre caractérisation du milieu d'un segment*

Démonstration en exercice

Méthode de construction d'un point à l'aide d'une somme de vecteurs
Soit un triangle ABC. Construisons le point *F* tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.



3.2 <u>Relation de Chasles</u>

Propriété *Relation de Chasles*

Démonstration admise

Remarques
1) En général, nous avons $AC \neq AB + BC$. Plus précisément, nous disposons de l'inégalité triangulaire $AC \leq AB + BC$. Il y a égalité seulement si $B \in [AC]$.
2) La relation de Chasles est utilisée fréquemment ; elle fournit un « degré de liberté infini » pour décomposer un vecteur en une somme de deux (ou plusieurs vecteurs).

Exemples

Remarque

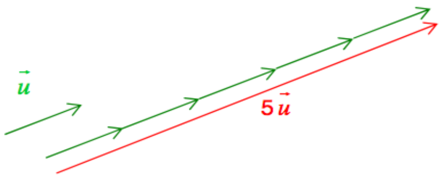
Un peu d'histoire des mathématiques
Michel Chasles (1793-1880) est un mathématicien français. La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs. Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César, …) !

Propriété *Règle du parallélogramme*

Démonstration en exercice

IV Produit d'un vecteur par un nombre

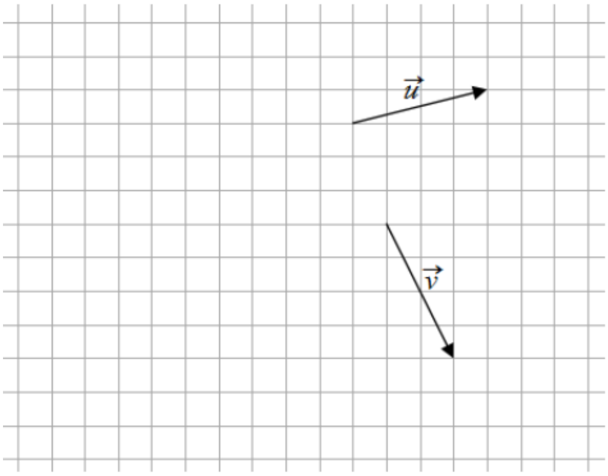
Exemple introductif
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$.
On remarque que Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens et que la norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.



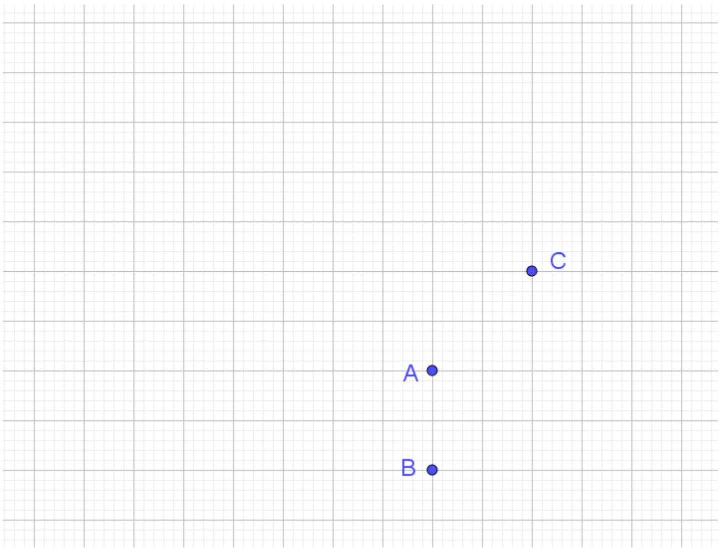
Définition *Produit d'un vecteur par un réel*

Exemples

1) Traçons les vecteurs $-3\vec{u}$; $2\vec{u}$; $\frac{1}{2}\vec{v}$ et $1{,}5\vec{v}$ ci-dessous.

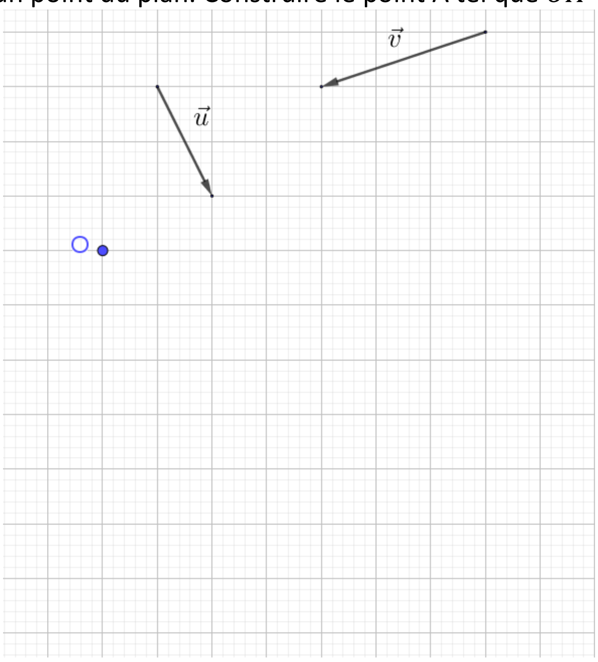


2) Traçons le vecteur $\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA}$ ci-dessous.

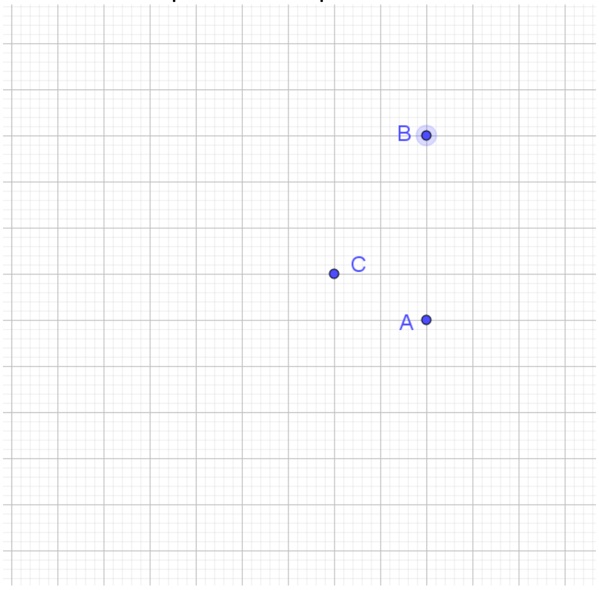


Exercice 1

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et O un point du plan. Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.



2. Soit trois points A, B, C du plan. Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.



Propriétés

Démonstrations admises

Exemple

Simplifions $\vec{w} = \dfrac{3}{2}(\vec{u} + 2\vec{v}) - 0{,}5\vec{u} - \vec{v}$.

Propriété *Autre caractérisation du milieu d'un segment*

Démonstration en exercice

V Vecteurs colinéaires

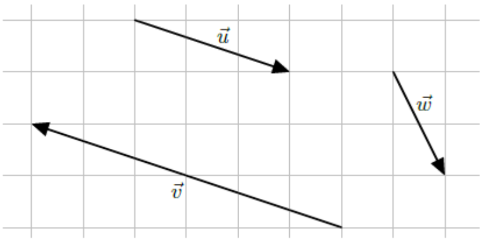
5.1 Définition

Définition *Vecteurs colinéaires*

Remarques

Exemples

1)



2)

5.2 Applications importantes de la colinéarité

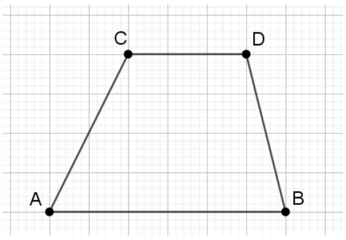
Propriétés *Alignement et parallélisme*

Démonstrations en exercice

Exemples

1)

2)



Soit le trapèze ABDC ci-contre.

Remarque

Attention à ne pas confondre droites parallèles et vecteurs colinéaires. En d'autres termes la locution « vecteurs parallèles » est incorrecte.

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme. On considère les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et le point N est tel que AMNP soit un parallélogramme.
Montrer que les points A,N et C sont alignés.

Exercice 3 *Théorème de la droite des milieux – version vectorielle*

Soit ABC un triangle quelconque. On note M le milieu [AB] et N le milieu de [AC]. Démontrer que (MN) est parallèle à (BC).