Thème : Matrices **26/01/24**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Exercice 1

Soit les matrices $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. En résolvant le système $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et en supposant que P est inversible, montrer que
$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. On considère les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par récurrence, pour u_0, v_0 et w_0 des réels, par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + w_n}{2}, n \in \mathbb{N} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

 a) Déterminer une relation matricielle entre U_{n+1} et U_n.
 b) Déterminer l'expression de U_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0. *Indication : Déterminer A^n*
 c) La suite (U_n) converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 2

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour côté x et $x + 1$, et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des nombres entiers non nuls.

Dans cette situation, on dit que le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI.

1. Démontrer que le couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels non nuls définit un TRPI si, et seulement si $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
On admet par la suite que le TRPI ayant les plus petits côtés est défini par le couple $(3\,;5)$.
2. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
x et y désignent deux nombres entiers naturels non nuls ; on définit les entiers naturels x' et y' par la relation : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

 a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
 b) Montrer que $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$.

c) En déduire que si le couple $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors le couple $(x';y')$ définit également un TRPI.

3. On considère les suites (x_n) et (y_n) d'entiers naturels, définies par $x_0 = 3, y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;y_n)$ définit un TRPI.

b) Déterminer le couple $(x_2\,;y_2)$.

Exercice 3

Un organisme propose un apprentissage de langues étrangères en ligne.
Deux niveaux sont présentés : débutant ou avancé. Au début de chaque mois, un internaute peut s'inscrire, se désinscrire ou changer de niveau.
Au début du mois 0, il y avait 300 internautes au niveau débutant et 450 au niveau avancé.
On constate que, chaque mois, la moitié des débutants passe au niveau avancé, l'autre moitié reste au niveau débutant et la moitié des avancés ayant terminé leur formation, se désinscrit du site.
De plus, chaque mois, 100 nouveaux internautes s'inscrivent en débutant et 70 en avancé.
On modélise cette situation par deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n).
Pour tout entier naturel n, d_n et a_n sont respectivement le nombre de débutants et le nombre d'avancés au début du mois n. Pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer U_0.

b) Justifier que pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

c) Déterminer les matrices A et B telles que, que pour tout pour entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$ où $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.

4. *On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4, 2^n \geq n^2$.*

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4, 0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.

5. Etudier la convergence de la suite (U_n). Que peut-on prévoir pour l'évolution de la fréquentation du site à long terme ?

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice A^2.

2. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un nombre a_n tel que A^n est de la forme : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^{n+1}.

b) En déduire la relation : $a_{n+1} = 3 - 2a_n$.

3. Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $b_n = a_n - 1$.

a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Déterminer l'expression de b_n, puis de a_n en fonction de n.

4. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice 5 – BONUS *Triangularisation d'une matrice*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Pour x un nombre réel, on pose $P(x) = \det(A - xI_2)$ (appelé *polynôme caractéristique de la matrice A*). Résoudre $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déduire de la question précédente que le système $(A - I_2)X = 0_2$ admet une infinité de solutions. Déterminer une solution X.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   b) Calculer $T = P^{-1}AP$.
4. Emettre une conjecture sur une expression de T^n pour tout n entier naturel non nul. Puis démontrer cette conjecture.
5. En déduire A^n pour n entier naturel non nul

Barème indicatif **Ex 1 :** **Ex 2 :** **Ex 3 :** **Ex 4 :** **Ex 5 - Bonus :**