Exercice 1

Soit a et b deux entiers.

1. **a.** Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a - b$ divise $a^n - b^n$.
2. En utilisant la question **1.b.**, montrer que si n est un entier naturel impair alors $a + 1$ divise $a^n + 1$.
3. Montrer que si $a \geqslant 3$ et si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 alors $a^n - 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.
4. Montrer que si a est un entier impair au moins égal à 3 et n un entier naturel non nul alors $a^n + 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.
5. Soit n un entier naturel au moins égal à 3. On suppose que n admet un diviseur impair $p \geqslant 3$ et que $a \geqslant 2$. Montrer que $a^n + 1$ admet au moins 3 diviseurs positifs.

Exercice 2

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose}$$
$$u_n = 4^n + 15n - 1.$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 et montrer que ces trois entiers sont tous divisibles par 9.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 45n + 18$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9 divise u_n.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que le produit de n entiers naturels consécutifs est un toujours un multiple de $n!$.
   Indication : On pourra s'aider du coefficient binomial…
2. En déduire que $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Question préliminaire
En calculant pour $q \neq 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$, en déduire une expression de $x^k - 1$.

Soit a et b deux entiers tels que $0 < b \leq a$. En écrivant l'égalité de la division euclidienne de a par b, déterminer le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$ et montrer qu'il est égal à $2^r - 1$.

Exercice 5

Soit n un entier naturel non nul. Dans chaque cas, déterminer le reste dans la division euclidienne de A par B.

1. $A = n^3 + 2n + 3$ et $B = n$;
2. $A = 6n + 5$ et $B = 2n + 3$;
3. $A = 6^n - 1$ et $B = 2^{n-1}$.

Exercice 6

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, déterminer les restes possibles dans la division euclidienne de m^2 par 4.
2. Soit u et v deux entiers et $n = u^2 + v^2$. Déduire de la question précédente les restes possibles dans la division euclidienne de n par 4.
3. Soit $q \in \mathbb{Z}$. Démontrer que l'équation $x^2 + y^2 = 4q + 3$ d'inconnue $(x\,;y)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 7

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que $3^{2n} \equiv 2^n\ [7]$ et que $2^{4n} \equiv 2^n\ [7]$.
2. En déduire que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$.

Exercice 8

1. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $2^n \equiv 0\ [4]$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de 3^n modulo 4 en fonction de n.
3. On considère quatre entiers consécutifs a, b, c et d.
   - **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n + b^n + c^n + d^n \equiv 1 + 2^n + 3^n\ [4]$.
   - **b.** Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste dans la division euclidienne de $a^n + b^n + c^n + d^n$ par 4 suivant la valeur de n.

Exercice 9

1. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $(n+1)^3 = n^2(n+3) + 3n + 1$.
   (b) Pour quels entiers naturels n le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 est-il $3n+1$?
2. a et b désignent deux entiers naturels avec $a > b$.
   Dans la division euclidienne de a par b, le quotient est q et le reste est r. On sait que $a + b = 86$ et que $r = 9$.
   Déterminer les couples $(a; b)$ possibles.

Exercice 10

1. On donne $a \equiv 6[11]$ et $b \equiv 5[11]$.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de : $2a + 3b$, de $a^2 + b^2$ et de ab
   (b) Montrer que $a^2 - b^2$ est divisible par 11.
2. Déterminer les entiers x tels que $2x \equiv 2[6]$.
3. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2012} par 17.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$.
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

Exercice 12

1. On considère l'équation (E_1) : $m^2 + 9 = 2^n$ et on suppose que cette équation admet une solution $(m\,;n)$ formée d'entiers naturels.

a. Justifier que $n \geq 4$.

b. Démontrer que m est impair.

c. Compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 4	0	1	2	3
Reste de la division euclidienne de m^2 par 4				
Reste de la division euclidienne de $m^2 + 9$ par 4				

d. Déduire des questions précédentes que l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

2. On considère l'équation (E_2) : $m^2 + 9 = 3^n$ et on suppose que cette équation admet une solution $(m\,;n)$ formée d'entiers naturels.

a. Justifier que $n \geq 2$.

b. Démontrer que m est pair.

c. Démontrer que 3^n est congru à 1 ou 3 modulo 4.

d. Déduire des questions précédentes que n est pair.

e. On écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(3^k - m)(3^k + m) = 9$ et en déduire que l'équation (E_2) admet une unique solution dans $\mathbb{N}^2$ qu'on explicitera.

3. L'équation $m^2 + 9 = 4^n$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{N}^2$?