Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Question de cours

1. Compléter la propriété de cours concernant la divisibilité d'une combinaison linéaire de deux entiers.
2. Démontrer cette propriété

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = 4^{2n+2} - 1$ et $b_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$.

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 16a_n + 15$.

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 15 divise a_n.

2. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = 15a_n$.

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 225 divise b_n.

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Ainsi, $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$, $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$, ect.

1. Calculer F_5 et vérifier que 641 divise F_5.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que les diviseurs de F_n sont tous impairs.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $F_{n+1} - 2 = F_n(F_n - 2)$.

b. En déduire, en utilisant aussi la question **2.**, que si un entier naturel d divise F_n et F_{n+1} alors $d = 1$.

4. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $F_n = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{n-1} + 2$.

b. Soit m et n deux entiers tels que $0 \leqslant m < n$. Déduire de la question précédente que si un entier naturel d divise F_m et F_n alors $d = 1$.

Barème probable QC : **Ex 1 :** **Ex 2 :**