## Exercice 1

**1. a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} 16a_n + 15 &= 16\left(4^{2n+2} - 1\right) + 15 = 16 \times 4^{2n+2} - 16 + 15 \\ &= 4^2 \times 4^{2n+2} - 1 = 4^{2n+4} - 1 = 4^{2(n+1)+2} - 1 = a_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 16a_n + 15}$.

**b.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P_n$ : « 5 divise $a_n$ ».
$a_0 = 4^2 - 1 = 15$ donc $P_0$ est vraie.
Supposons que $P_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, 15 divise $a_k$ et 15 divise 15 donc 15 divise $16a_k + 15 = a_{k+1}$. Ainsi, $P_{k+1}$ est vraie et on a prouvé par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 15|a_n}$.

**2. a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16 - \left[4^{2n+2} - 15n - 16\right] = 4^{2n+4} - 4^{2n+2} - 15 \\ &= 4^2 \times 4^{2n+2} - 4^{2n+2} - 15 = 15 \times 4^{2n+2} - 15 = 15\left[4^{2n+2} - 1\right] \\ &= 15a_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} - b_n = 15a_n}$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $b_0 = 4^2 - 15 \times 0 - 16 = 0$ donc 225 divise $b_0$.
Si $n \geqslant 1$ alors, comme $b_0 = 0$,

$$b_n = b_n - b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} + b_{n-2} - \cdots + b_2 - b_1 + b_1 - b_0 = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 15a_k.$$

Or, d'après la question 1.b., pour tout $k \in \mathbb{N}$, 15 divise $a_k$ donc $15^2 = 225$ divise $15a_k$.
On en déduit que 225 divise la somme $\sum_{k=1}^{n} 15a_k$ i.e. 225 divise $b_n$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 225 \text{ divise } b_n}$.

*Autre méthode.* — Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $Q_n$ : « 225 divise $b_n$ ».
Comme $b_0 = 0$, $Q_0$ est vraie.
Supposons que $Q_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$
Alors, d'après la question 1.b., 15 divise $a_k$ donc $15^2 = 225$ divise $15a_k$. Dès lors, 225 divise $b_k + 15a_k = b_{k+1}$ d'après la question précédente. Ainsi, $Q_{k+1}$ est vraie et on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 225 \text{ divise } b_n}$.

**Exercice 2**

1. Par définition, $F_5 = 2^{(2^5)} - 1 = 2^{32} - 1 = 4\,294\,967\,297$. On vérifie que $F_5 = 641 \times 6700417$ donc $\boxed{641 \text{ divise } F_5}$.

2. Comme $2^n \geqslant 1$, $2^{(2^n)}$ est pair donc $F_n$ est impair. Il s'ensuit que les diviseurs de $F_n$ sont tous impairs.

3. **a.** Par définition,

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} + 1 - 2 = 2^{2^n \times 2} - 1 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 1^2 = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right)$$

i.e. $\boxed{F_{n+1} - 2 = F_n(F_n - 2)}$.

**b.** Soit $d$ un entier naturel qui divise $F_n$ et $F_{n+1}$. Alors, $d$ divise toute combinaison de $F_n$ et $F_{n+1}$ donc $d$ divise $F_{n+1} - (F_n - 2)F_n = 2$. Ainsi, $d = 1$ ou $d = 2$. Mais, on a vu que les diviseurs de $F_n$ sont impairs donc $\boxed{d = 1}$.

4. **a.** Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P_n$ : « $F_n = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{n-1} + 2$ ».
Comme $F_0 + 2 = 3 + 2 = 5 = F_1$, $P_0$ est vraie.
Supposons que $P_k$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.
Alors, $F_k = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{k-1} + 2$. Or, d'après la question **3.a.**, $F_{k+1} = F_k(F_k - 2) + 2$ donc

$$F_{k+1} = F_k(F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{k-1} + 2 - 2) + 2 = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{k-1} \times F_k + 2$$

donc $P_{k+1}$ est vraie.
On conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{n-1} + 2}$.

**b.** Soit $d$ un entier naturel qui divise $F_m$ et $F_n$. Comme $n > m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Ainsi, d'après la question précédente, $F_n = F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} + 2$. Or, $m$ est compris entre 0 et $n - 1$ donc $F_m$ divise $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1}$ et, par suite, $d$ divise $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1}$. Ainsi, $d$ divise $F_n - F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_{n-1} = 2$ donc, comme $d$ est positif, $d = 1$ ou $d = 2$. Mais, comme précédemment, $d$ est impair donc $\boxed{d = 1}$.