PRÉPARATION À LA PREMIÈRE ANNÉE D'ECG

Lycée Henri-IV

Voici un document dont l'ambition est d'accompagner l'élève de terminale S à opérer la transition entre la classe de terminale S et la première année de classes préparatoires en filière ECG. Pour cela, on y reprend, en les approfondissant, des notions vues en première et en terminale S, avec l'idée de se projeter dans l'esprit des mathématiques qui seront vues en première année d'ECG. Ce document contient des éléments de cours agrémentés de nombreux exercices.

Il s'organise en cinq parties, :

— **Modes de raisonnement :** cette partie reprend les principaux modes de raisonnement pratiqués en mathématiques (raisonnement par l'absurde, par récurrence, par analyse-synthèse).

— **Èléments de logique et introduction à la théorie des ensembles :** on y développe les éléments du langage logique mathématiques (quantificateurs $\forall, \exists$) et quelques éléments de théorie des ensembles (notation ensembliste, appartenance, définition d'exemples en compréhension, etc.). Cette partie se termine par une revue des principaux objets mathématiques manipulés dans la filière ECG.

— **Calculs algébriques :** cette partie définit les symboles somme $\sum$ et produit $\prod$, ainsi que la notion de factorielle et de coefficient binomial. Nous y développons également certains résultats classiques liés à ces symboles (somme d'entiers consécutifs, somme des termes d'une suite géométrique, formule du binôme de Newton, etc.).

— **Analyse de la variable réelle :** nous reprenons ici certains éléments déjà vus en première et terminale S (continuité, limite, dérivabilité, intégrale sur un segment d'une fonction continue). Nous donnons également une introduction aux techniques d'intégration par parties et de changement de variable.

— **Eléments de dénombrement :** cette partie propose une introduction aux techniques de dénombrement. Elle est assortie de nombreux exemples et mises en situations.

En annexe, nous proposons des éléments de réponse et des indications pour aider à la résolution des exercices.

Table des matières

I Modes de raisonnement

A Introduction à la démonstration mathématique

Les mathématiques sont, surtout et avant tout, un langage dont la matrice principale est la langue d'usage, c'est-à-dire, pour nous, la langue française. Autrement dit, une démonstration mathématique est un texte, dont les articulations sont des mots de liaison judicieusement choisis.

Par exemple, les deux énoncés suivants :

Si x est un réel supérieur ou égal à 1, alors $\ln(x)$ est positif ou nul

et

Le réel x est supérieur ou égal à 1 parce que $\ln(x)$ est positif ou nul

ne signifient pas du tout la même chose, même s'ils sont vrais tous les deux. Dans le premier énoncé, $x \geq 1$ est la cause, alors que $\ln(x) \geq 0$ est la conséquence. Dans le second énoncé, c'est l'inverse.

Les deux suivants :

Si x est un réel supérieur ou égal à 2, alors $\ln(x)$ est positif ou nul

et

Le réel x est supérieur ou égal à 2 parce que $\ln(x)$ est positif ou nul

non plus, d'autant plus que le second énoncé est faux. En effet, le fait que $\ln(x)$ soit positif ou nul implique seulement que x est un réel supérieur ou égal à 1, et non nécessairement que x est un réel supérieur ou égal à deux.
Le manque de rigueur dans les rapports de cause à conséquence est un écueil à éviter autant que possible en mathématiques - et dans bien d'autres domaines, comme il est malheureusement permis de le constater au quotidien.

Par ailleurs, les mathématiques ajoutent à la langue dite « courante » un langage logique spécifique, impliquant des symboles ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, etc.) et une syntaxe qui lui sont propres.

Comme indiqué dès le début de cette introduction, **un raisonnement mathématique n'est pas simplement un enchaînement de calculs**, c'est un texte articulé dans un langage constituant une « version augmentée » de la langue courante. Ainsi, il est illusoire de penser qu'on peut répondre à une question par un simple enchaînement de calculs, non contextualisé.

Exemple - Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels.
Question : résoudre l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

Réponse incorrecte : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$ donc $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ ou $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$. D'où $S = \{1, 2\}$.

Commentaires à la réponse incorrecte : on ne comprend rien. Votre lecteur n'est pas censé deviner, de lui-même, ce que sont Δ, a, b, x_1, x_2 et S. Il faut lui expliquer ce que vous êtes en train de faire, clarifier vos notations, présenter les variables introduites.
En quelque sorte, votre lecteur doit pouvoir, sans efforts particuliers, deviner la question qui a été posée à la seule lecture de la réponse proposée.

Proposition de réponse correcte : on calcule le discriminant de cette équation : $\Delta = 9 - 8 = 1$. L'équation admet donc deux solutions réelles qui sont $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc $S = \{1, 2\}$.

Commentaires à la réponse correcte : tout est plus clair : Δ désigne le discriminant de l'équation, x_1 et x_2 en désignent les solutions et S, l'ensemble des solutions. Le raisonnement est plus fluide, on suit beaucoup plus facilement ce qui se passe. Les calculs ne sont qu'un moyen, qui est subordonné à un raisonnement proprement articulé.
Il ne s'agit pas de se perdre en d'interminables circonvolutions ni d'en écrire des pages (surtout pour une équation du second degré) : il s'agit d'aller à l'essentiel tout en garantissant la présence des rouages qui font l'articulation du raisonnement.

Le principe d'une démonstration mathématique est de partir d'hypothèses et de parvenir à une conclusion en progressant par implications vraies. Ce principe, formalisé par Hilbert sous le nom de *modus ponens*, gouverne l'ensemble des démonstrations mathématiques dites « directes ». Par exemple, considérons deux réels a et b non nuls et l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = a\cos(x) + b$. Je souhaite démontrer l'énoncé suivant :

$$\textit{si } \frac{b}{a} \in [-1; 1], \textit{ alors il existe } x \in \mathbb{R} \textit{ tel que } f(x) = 0.$$

Pour cela, je pars de l'hypothèse que a et b sont tels que $\frac{b}{a} \in [-1; 1]$: *supposons* que $\frac{b}{a} \in [-1; 1]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$f(x) = a \cdot \left(\cos(x) + \frac{b}{a}\right)$$

La division par a m'est autorisée du fait que $a \neq 0$. Comme $\frac{b}{a}$ est un réel compris entre -1 et 1, alors d'après les propriétés de la fonction $\cos$, je peux trouver un réel θ tel que $\cos(\theta) = \frac{b}{a}$.
Ainsi, en posant $x = \theta + \pi$, par exemple, j'obtiens : $\cos(x) = -\cos(\theta) = -\frac{b}{a}$, d'où $f(x) = 0$.

La démonstration de l'énoncé est alors achevée, puisque l'hypothèse $\dfrac{b}{a} \in [-1;1]$ a rendu possible le fait de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice - Amélioration de l'énoncé. Montrer qu'on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$ si et seulement si $\dfrac{b}{a} \in [-1;1]$.

Le raisonnement développé ci-dessus est un raisonnement *direct* : on part d'hypothèses et on arrive à la conclusion recherchée en progressant d'implication en implication, par déductions successives. Il existe d'autres types de raisonnements, que la suite de cette partie propose d'explorer.

B Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à démontrer un énoncé en établissant que son contraire est faux. Pour cela, on suppose son contraire réalisé et on montre que cette hypothèse implique une absurdité.

La principale difficulté de ce raisonnement tient dans la bonne formulation du contraire de la proposition à démontrer.

Exemple - $\sqrt{2}$ est irrationnel. *Question :* montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Remarque sur l'énoncé : cela revient à montrer qu'il est impossible de trouver $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Le contraire de la proposition à démontrer, « $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ » est donc « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ », qui peut se reformuler par « $\exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ».

Réponse : on procède par l'absurde en supposant qu'on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à diviser p et q par leur PGCD, on peut supposer p et q premiers entre eux.
On a alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair, ce qui impose que p soit pair (un raisonnement rapide montre que le carré d'un nombre pair est pair et que le carré d'un nombre impair est impair, cf. exercice *infra*).
On écrit alors $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et ceci donne $q^2 = 2k^2$. On en déduit que q est lui aussi pair, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux et constitue une absurdité.
En conclusion, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Remarque sur l'exercice : tout nombre rationnel admet une écriture sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et p, q premiers entre eux. Si, en plus, on impose $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (ce qui revient à imposer au numérateur de porter le signe de la fraction), alors cette écriture est unique. On l'appelle *la forme irréductible* du rationnel considéré.

Exemple - Fonctions affines bornées. *Question :* montrer que les fonctions affines qui sont bornées sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes.

Remarque sur l'énoncé : on rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite bornée sur $\mathbb{R}$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f(x)| \leq M$.
Ceci implique qu'une fonction bornée ne peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ pour $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. C'est cette dernière propriété que nous allons utiliser ici.

Avant de répondre : l'énoncé peut se réexprimer ainsi : « pour toute fonction affine bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut trouver une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a$. ». Se prêter à l'exercice de reformulation n'est pas chose aisée, mais elle est absolument nécessaire dans l'exécution d'un raisonnement par l'absurde.

Réponse : nous allons procéder par l'absurde. Pour cela, considérons une fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Considérons donc deux réels a, b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.
Supposons, par l'absurde, que f n'est pas constante, c'est-à-dire que $a \neq 0$. Alors on constate que $f(x)$ tend vers $+\infty$ pour $x \to +\infty$ (si $a > 0$) ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ pour $x \to -\infty$ (si $a < 0$). Dans tous les cas, f ne peut être bornée, ce qui contredit une des hypothèses faites sur f et constitue une absurdité.
En conclusion, f est nécessairement constante.

Il n'est pas nécessaire d'user d'un raisonnement par l'absurde en toute situation. On lui préférera, autant que possible, un raisonnement dit « direct », consistant à partir des hypothèses et à progresser par implications logiques pour parvenir à la conclusion.

Exemple - Inutile de raisonner par l'absurde !. *Question :* montrer que $x^2 + 1 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réponse : soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \geq 0$ et $1 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 0$.

Remarque sur la réponse : inutile de raisonner par l'absurde en supposant qu'on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 1 < 0$ pour aboutir à $x^2 < -1 < 0$, ce qui constitue une absurdité. Ce raisonnement, correct par ailleurs, pèche par maladresse.

Remarque - Le raisonnement par contraposée. Parfois identifié, à tort, au raisonnement par l'absurde, le raisonnement par contraposée consiste, pour démontrer qu'une proposition A implique une proposition B, à montrer que le contraire de la proposition B implique le contraire de la proposition A.
En langage logique du premier ordre, ceci est la traduction du fait que si A et B sont des propositions mathématiques, alors $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

C Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence s'utilise pour démontrer une proposition mathématique dont le résultat ("vrai" ou "faux") dépend d'un entier naturel n. Par exemple l'énoncé suivant, défini pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) = (n^2 + 1 \leq 5)$$

est vrai pour $n = 0, 1, 2$ et faux pour $n \geq 3$. Autrement dit : $P(0) = P(1) = P(2) =$ Vrai et $\forall n \geq 3, P(n) =$ Faux.

Considérons une proposition mathématique dépendant d'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et notons cette proposition $P(n)$. Le **raisonnement par récurrence** consiste à considérer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si les deux éléments suivants sont réalisés :
— *Initialisation :* $P(0)$ est vraie
— *Hérédité :* pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ est vraie.

Dans la pratique, la rédaction d'un raisonnement par récurrence implique trois phases :

1. *Formalisation de la proposition :* « On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \ldots$ »[1]. Cette phase est parfois délicate, mais elle est un préalable *indispensable* à la suite du raisonnement. Une proposition $P(n)$ mal formalisée conduit irrémédiablement à un raisonnement faux ou hors sujet.
2. *Initialisation :* on vérifie que $P(0)$ est vraie. Cette phase présente souvent peu de difficultés, mais est absolument nécessaire pour conclure dans le cadre de ce raisonnement (cf. remarque plus bas).
3. *Hérédité :* « Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie et démontrons $P(n+1)$ ». Il s'agit là d'être *affirmatif* : écrire « supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n » est trop timoré. Après la phase d'initialisation, on sait qu'il existe bien au moins un n (en l'occurrence, $n = 0$) tel que $P(n)$ est vraie. D'où la formulation « *Soit* $n \in \mathbb{N}$ tel que etc. ».

Le raisonnement exposé ci-dessus possède des variantes, elles aussi regroupées sous le nom de « raisonnement par récurrence » :
— **dans le cas où la proposition ne commence pas à** $n = 0$, mais à $n = 1$ ou autre : dans ce cas, $P(n)$ n'est définie qu'à partir d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé et la phase d'initialisation consiste en la démonstration de $P(n_0)$ (au lieu de $P(0)$).
— **le raisonnement par récurrence dite « forte » :** dans ce cas, la phase d'hérédité consiste non plus à se donner n tel que $P(n)$ est vraie, mais $n \in \mathbb{N}$ tel que *pour tout* k *compris entre* 0 *et* n, $P(k)$ est vraie.

1. A ne pas confondre avec : « on définit $P(n) =$ "$\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$" » qui est une **erreur logique grave** : une proposition mathématique commençant par « $\forall n \in \mathbb{N}, \ldots$ », par définition du quantificateur $\forall$, est indépendante de n.

Exemple - Calcul d'une somme classique. Question : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Réponse : on procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ la proposition « $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

- Initialisation ($n = 0$) : la somme est composée du seul terme 0 et le membre de droite vaut 0. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $P(n)$ est vraie et démontrons $P(n+1)$.
  On a : $\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k$.
  Par hypothèse de récurrence, on a donc :
  $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$
  ce qui montre que $P(n+1)$ est vraie.

Ceci achève la récurrence et démontre la proposition pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice - Quelques récurrences. Démontrer les résultats suivants par récurrence. On veillera à bien formaliser la proposition à démontrer et on utilisera un raisonnement par récurrence classique ou forte, selon la situation.

1. **Somme des carrés d'entiers consécutifs :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2. **Somme des cubes d'entiers consécutifs :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
3. Tout nombre entier naturel admet un diviseur premier (*N.B. :* ce résultat démontre l'existence d'une décomposition en facteurs premiers pour tout entier naturel).
4. **Somme des termes d'une progression géométrique :** pour tout $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
Que se passe-t-il dans le cas où $q = 1$?
5. **Inégalité de Bernoulli.** Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

N.B. : les deux premiers résultats et le quatrième sont des formules qui seront à connaître au cours de la première année d'ECG. Il faut bien noter que q doit être différent de 1 dans le résultat du (iv).

Remarque - Initialisation fausse, hérédité vraie. La phase d'initialisation peut sembler si immédiate qu'on est tenté de s'en passer. C'est un oubli qui peut déboucher sur des erreurs importantes, comme le montre l'exemple suivant.
Considérons la proposition définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$P(n)\ :\ \left[\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n^2+n+1)\right]$$
Le lecteur pourra vérifier que si $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $P(n+1)$ est aussi vraie. Pourtant, $P(0)$ est fausse.
Même si la phase d'hérédité contient l'essentiel du travail « technique » (calculs, raisonnement, etc.), elle ne permet pas à elle seule de conclure.

D Le raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse s'utilise principalement dans le cas où il est demandé de rechercher une condition nécessaire et suffisante pour que telle propriété (dépendant de paramètres) soit vérifiée ou dans le cas où il est demandé de déterminer l'ensemble des éléments vérifiant une propriété, *sans qu'il ne soit donné la moindre idée de la réponse*. Ainsi, il y a une différence entre les deux questions suivantes :

$$\text{Déterminer l'ensemble des couples } (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ tels que } \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$$

et

$$\text{Montrer que pour tout couple } (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \text{ on a } \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \text{ si et seulement si } a \neq b.$$

Dans le deuxième cas, on connaît la réponse (« *Montrer que ...* ») alors que dans le premier, on l'ignore.
Le raisonnement par analyse-synthèse concerne le premier type de formulation.

Ce raisonnement s'articule en deux phases :

1. **Phase d'analyse :** on suppose la propriété caractéristique réalisée et on essaie de trouver ce que cela implique sur les paramètres sous-jacents. Par exemple, dans le cas ci-dessus, on considère un couple (a,b) tel que l'inégalité stricte soit réalisée. On a alors
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$
et, cette quantité étant supposée *strictement* positive, cela implique que $a \neq b$.
La difficulté, dans cette phase, est de *savoir quand s'arrêter* : à quel moment décide-t-on qu'on en a suffisamment appris sur les paramètres en jeu ? C'est une question difficile à trancher et pour laquelle la phase de synthèse apporte des éléments de réponse.
2. **Phase de synthèse :** on suppose réalisées les conditions trouvées à l'issue de la phase d'analyse et on essaie de montrer que la propriété recherchée est vraie.
Par exemple, ici, on suppose que $a \neq b$. Alors, le même calcul que ci-dessus montre :
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$
car $a \neq b$. La synthèse est donc réalisée.
Si la phase d'analyse n'a pas été poussée assez loin, la propriété trouvée sur les paramètres ne permettra pas de finaliser la synthèse (par exemple, ici, rien ne dit, *a priori*, que la condition $a \neq b$ suffit pour « remonter »). Il faut, dans ce cas, reprendre la phase d'analyse et trouver d'autres conditions.

Un point de vocabulaire : la phase d'analyse permet de trouver des **conditions nécessaires** pour que la proposition soit réalisée. La phase de synthèse examine si ces conditions sont **suffisantes** pour cela.

Exercice - Quelques raisonnements par analyse synthèse. Résoudre les questions suivantes, en utilisant un raisonnement par analyse-synthèse.

1. Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré 2 s'annulant en $x = 1$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 3.
3. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $b \in \mathbb{R}$ le polynôme $2X^2 - b$ admet-il deux racines rationnelles ?

II Eléments de logique et introduction à la théorie des ensembles

A Propositions et quantificateurs $\forall$, $\exists$

- **Propositions mathématiques.**

Une démonstration mathématique est un enchaînement de *propositions mathématiques*, c'est-à-dire d'énoncés dont la valeur logique est « vrai » ou « faux ». Par exemple, les énoncés suivants :

— « l'entier 2 est supérieur ou égal à 3 »,
— « la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est impaire »,
— « pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(x) \leq x - 1$ »,
— « il existe trois points A, B, C du plan tels que le triangle ABC soit rectangle en A »,

sont des propositions mathématiques. Chacune d'entre elles a une valeur logique déterminée.

Les énoncés suivants, en revanche, n'en sont pas :

— « 2 est un nombre plus joli que π »,
— « un mathématicien préfère toujours additionner des nombres entiers plutôt que des nombres imaginaires purs »,
— « la trigonométrie est plus intéressante que l'algèbre linéaire »,

car il est impossible d'évaluer leur véracité dans le champ des mathématiques.

Les énoncés suivants :

— « x est un réel positif »,
— « le triangle ABC est rectangle »,
— « la variable aléatoire X a pour espérance 5 »,

ont une valeur qui dépend, à chaque fois, d'un paramètre mathématique fixé à l'extérieur de la proposition. Par exemple, la première dépend du paramètre x, la seconde dépend de trois paramètres (les points A, B et C) et la troisième dépend d'un paramètre, la variable aléatoire X. Il est impossible de donner une valeur logique à ces propositions, dites *propositions à paramètre*, tant que le ou les paramètres qu'elles contiennent n'ont pas été précisé.

- **Quantificateurs.**

Le langage mathématique utilise deux quantificateurs :

— le quantificateur universel (quel que soit, noté $\forall$),
— le quantificateur d'existence (il existe, noté $\exists$).

Définition 1. (Quantificateurs $\exists$ et $\forall$).
Ètant donné une proposition mathématique $P(x)$ dépendant d'un paramètre x et un *ensemble* E dans lequel le paramètre x évolue (cf. section suivante), on crée deux propositions mathématiques :

- **Quantificateur « quel que soit » :** « $\forall x \in E, P(x)$ », qui est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour *tout* $x \in E$.
- **Quantificateur « il existe » :** « $\exists x \in E, P(x)$ », qui est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour *au moins un* $x \in E$.

On trouve aussi la suivante :

- **Quantificateur « il existe un unique » :** « $\exists! x \in E, P(x)$ », qui est vraie si et seulement si $P(x)$ est vraie pour *un et un seul* $x \in E$.

Ainsi :

— pour contredire une proposition du type « $\forall x \in E, P(x)$ », il suffit de trouver au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse : on appelle cela un **contre-exemple**. Par exemple, pour contredire la proposition « $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + 1 \in \mathbb{N}$ », il s'agit de trouver au moins une valeur de $x \in \mathbb{N}$ telle que $x^2 + 1 \notin \mathbb{N}$ (ce qui est impossible).

— contredire une proposition du type « $\exists x \in E, P(x)$ » consiste à montrer que pour tout $x \in E$, $P(x)$ est fausse.

Finalement, on a donc les mécanismes suivants :

— la négation de « $\forall x \in E, P(x)$ » est « $\exists x \in E, \neg P(x)$ »,

— la négation de « $\exists x \in E, P(x)$ » est « $\forall x \in E, \neg P(x)$ ».

Exercice - Propositions à quantificateurs. Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions ci-dessous. Déterminer, démonstration à l'appui, si chaque proposition est vraie ou fausse.

1. tout réel supérieur ou égal à 1 est de logarithme népérien strictement positif.
2. si un réel est de carré supérieur ou égal à 4, alors il est lui-même supérieur ou égal à 2.
3. si un réel est de carré supérieur ou égal à 4, alors il est lui-même de valeur absolue strictement supérieure à 2.
4. un entier naturel est toujours un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un autre entier naturel).
5. la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

B Notion d'ensemble, d'appartenance

L'essentiel des mathématiques de classes préparatoires a pour cadre la théorie des ensembles, sous l'axiomatique de Zermelo et Fraenkel. Sans entrer dans les détails de cette axiomatique, nous nous contenterons de communiquer l'intuition de ce qu'est un *ensemble* ainsi que le concept d'*appartenance* par la « définition » suivante :

Définition 2. (Ensemble, appartenance).
Un ensemble est une collection d'objets. Etant donné un ensemble E, on dit que l'objet x *appartient à* E ou encore que x *est un élément de* E, chose notée $x \in E$, si x est présent parmi la collection d'objets qui constitue E.

La description d'un ensemble s'effectue de deux manières différentes :

— **en extension** : l'ensemble est alors décrit comme la liste exhaustive de ses éléments, entre accolades et séparés par des virgules, par exemple :
  — $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est l'ensemble constitué des éléments qui sont les entiers naturels de 1 à 5 ;
  — $F = \{1, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$ est l'ensemble constitué de l'entier 1, de l'ensemble constitué du seul nombre 2 et de l'ensemble constitué des nombres $3, 4, 5$. Sa composition est donc hétérogène, puisque F contient un nombre et deux ensembles de nombres.

— **en compréhension** : l'ensemble est alors décrit comme la liste des éléments appartenant à un autre ensemble vérifiant une propriété donnée, par exemple :
  — $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 \geq 0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $x^2 - 2x + 2$ est positif ou nul. La détermination de cet ensemble équivaut donc à la résolution de l'inéquation $x^2 - 2x + 2 \geq 0$.
  — $E = \{n \in \mathbb{N} : \exists (k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2, (k \geq 2 \text{ et } l \geq 2 \text{ et } kl = n)\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire comme produit de deux entiers naturels égaux au moins à 2, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels qui ne sont pas premiers.

La façon dont l'appartenance est « définie » permet, dans la description d'un ensemble, de ne pas indiquer de répétitions. Par exemple, les ensembles $\{1, 2, 2, 3, 4\}$ et $\{1, 2, 3, 4\}$ sont parfaitement identiques. En réalité, on dit que deux ensembles sont identiques s'ils ont les mêmes éléments :

Définition 3. (Principe de double inclusion).
Les ensembles E et F sont dits *identiques*, ou *égaux* (noté $E = F$), si $\forall x \in E, x \in F$ et $\forall x \in F, x \in E$.

Ainsi, une égalité ensembliste doit se démontrer en établissant deux inclusions.

Exercice - Syntaxe ensembliste. Ecrire mathématiquement, c'est-à-dire en utilisant une forme entre accolades, les ensembles décrits ci-dessous.

1. l'ensemble des diviseurs entiers (positifs) de 24 (deux écritures possibles : en compréhension et en extension),
2. l'ensemble des nombres réels dont le carré est supérieur ou égal au cosinus,
3. l'ensemble des couples de réels représentant des coordonnées de points strictement inclus dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1,
4. (**) l'ensemble des applications affines définies sur $\mathbb{R}$.
5. (**) l'ensemble des suites réelles arithmétiques.

C Usage de la théorie des ensembles en mathématiques en CPGE

La plupart des problèmes posés en mathématiques en classes préparatoires peuvent se ramener à des problèmes ensemblistes, comme le montrent les exemples suivants :

1. **Résolution d'une équation, d'une inéquation ou d'un système d'équations :** résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ signifie déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient cette égalité. Ici, l'ensemble recherché, également appelé *ensemble des solutions* de cette équation, est l'ensemble $\{1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$. De même, résoudre l'inéquation $|x^2 - 1| \leq x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ revient à déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ vérifiant cette inégalité. Ici, l'ensemble recherché est le singleton $\{1\}$ (aucun autre réel ne convient).

2. **Démonstration d'une implication :** par exemple, la question qui consiste à démontrer que toute fonction polynomiale réelle bornée est constante peut se reformuler de la manière suivante : montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales réelles bornées est *inclus* dans l'ensemble des fonctions réelles constantes.

3. **Démonstration d'une équivalence :** reprenant l'exemple précédent, en réalité, une fonction polynomiale est bornée sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si* c'est une fonction constante. Pour le démontrer, on a besoin de l'implication précédente, mais aussi de sa *réciproque* qui consiste à montrer que l'ensemble des fonctions constantes est inclus dans l'ensemble des fonctions polynomiales bornées sur $\mathbb{R}$. Cette *double inclusion* ensembliste permet alors d'affirmer l'*équivalence* entre les deux assertions.

D Les principaux objets mathématiques étudiés en ECG

Voici un liste (non exhaustive) des objets et ensembles étudiés en mathématiques dans la filière ECG :

— **les ensembles usuels de nombres :** on compte, par ordre croissant d'inclusion, $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels), $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs), $\mathbb{Q}$ (ensemble des nombres rationnels), $\mathbb{R}$ (ensemble des nombres réels).
A ces ensembles classiques, il faut ajouter les **intervalles réels**. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note quatre types d'intervalle de longueur finie, les segments de type $[a;b]$, les intervalles semi-ouverts de type $[a;b[$ ou $]a;b]$ et les intervalles ouverts de type $]a;b[$.
A ceux-ci nous devons ajouter les intervalles de longueur infinie, du type $]-\infty;a]$, $]-\infty;a[$, $[a;+\infty[$ et $]a;+\infty[$. $\mathbb{R}$ est aussi un intervalle, qu'on pourrait noter $]-\infty;+\infty[$.

— **les ensembles d'entiers relatifs consécutifs :** on adopte également la notation $[\![k;l]\!]$, où $k, l \in \mathbb{Z}$ avec $k \leq l$, pour désigner l'ensemble des entiers relatifs compris (au sens large) entre k et l. Par exemple, l'ensemble $[\![-3;4]\!]$ est l'ensemble constitué des entiers $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $[\![1;n]\!]$ est constitué des entiers numérotés de 1 à n (il contient donc n éléments).

— **les applications :** une application f reliant deux ensembles E et F, notée

$$f : E \longrightarrow F$$

est un objet mathématique qui à *tout* élément $x \in E$ associe un élément de F noté $f(x)$.
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E. On utilisera souvent, de manière abusive, le terme de *fonction* pour désigner une application.
Parmi les applications, on retrouve les fonctions de la variable réelle, dont l'étude est déjà abordée dans le secondaire, comme par exemple l'objet suivant

$$f: \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x)+x-1 \end{array}$$

— **les polynômes à coefficients rationnels ou réels :** un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) est une expression algébrique de la forme

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'objet algébrique « X » est appelée *indéterminée* et se manipule, dans les calculs, comme une inconnue.
Les polynômes s'additionnent et se multiplient comme des expressions algébriques classiques. Les polynômes s'évaluent en des éléments de $\mathbb{K}$; ainsi, pour un polynôme P et un nombre $\alpha \in \mathbb{K}$, $P(\alpha)$ est un élément de $\mathbb{K}$ dont la valeur est égale à ce qui est obtenu en remplaçant X par α dans l'expression algébrique de P.
Les polynômes se *dérivent* également, de la même manière que la fonction de la variable réelle qu'ils représentent. Ainsi, le polynôme dérivé du polynôme $P = X^3 - X + 1$ est le polynôme $P' = 3X^2 - 1$.
L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$.

— **les matrices à coefficients réels :** une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ correspond à la donnée d'un couple $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ (sa taille) et de $n \cdot p$ éléments de $\mathbb{R}$ (ses coefficients), organisés sous forme de « tableau » à n lignes et p colonnes, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

est une matrice de taille 3×4 (3 lignes et 4 colonnes) à coefficients réels. Son coefficient en position $(3,4)$ est noté $A[3,4]$ et vaut 10.
Les matrices s'additionnent. Elles se multiplient également, selon un mécanisme plus complexe qui a été abordé en enseignement de « mathématiques expertes » et qui sera repris et approfondi au cours de la première année.
Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices de taille (n,p) et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Lorsque $n = p$, on le note simplement $M_n(\mathbb{K})$ (au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$).

— **les suites numériques :** une suite numérique est une famille infinie, indexée (c'est-à-dire dont les termes sont « numérotés ») le plus souvent par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$, composée de nombres réels. Une telle famille est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}$ (pour une suite réelle).
L'étude des suites numériques se focalise sur leur comportement asymptotique, c'est-à-dire sur le comportement du nombre u_n lorsque n tend vers $+\infty$ (convergence, recherche d'équivalent, etc.). Les caractéristiques propres d'une suite (croissance, décroissance, signe, etc.) aident à mieux en saisir les propriétés asymptotiques.

Parmi les suites numériques, il en est de type particulier qu'on voit déjà dans le secondaire (suites arithmétiques, suites géométriques, etc.). On ajoute, en classes préparatoires, l'étude des suites arithmético-géométriques et des suites récurrentes linéaires d'ordre 2. De nombreux exercices traitent également de l'étude des suites définies par récurrence (c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$) et des suites implicites (c'est-à-dire dont le terme général u_n est défini comme solution d'une équation qu'il est impossible de résoudre explicitement).
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Plus généralement, l'ensemble des suites à valeurs dans un ensemble E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

III Calculs algébriques : sommes et produits, coefficients binomiaux

Cette partie constitue une introductions aux calculs impliquant les symboles $\sum$ (somme) et $\prod$ (produit). Nous nous contenterons de les présenter sur des familles de nombres, sachant qu'il est possible de les extrapoler à tous les objets mathématiques qui peuvent s'additionner ou se multiplier (matrices, fonctions, suites, etc.).

A Symbole somme $\sum$ et sommes classiques

On définit la somme d'une famille finie de nombres comme suit.

Définition 4. (Symbole somme).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit l'objet $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ par

$\rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = x_1$ si $n = 1$

$\rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = x_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k$ sinon.

On convient que $\sum\limits_{k=1}^{0} x_k = 0$ (« somme vide »).

Autrement dit, la quantité $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ peut également se représenter comme suit, de manière moins rigoureuse :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

En particulier, on trouve les propriétés suivantes :
- toute permutation des termes d'une somme ne change pas sa valeur
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et avec les mêmes notations : $\lambda \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda \cdot x_k)$

En revanche, on n'a pas, en général : $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k y_k)$: le résultat d'un produit de deux sommes débouche plutôt sur un développement plus élaboré impliquant $n \times n$ termes. On écrira plutôt, sous forme de *somme double* :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i y_j)$$

Cette notation de somme double sera définie et étudiée dans les premières semaines de la première année d'ECG.

La notation k dans l'expression $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ représente un *indice muet*, dont le nom peut être changé à l'envi sans que le résultat de la somme ne change :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = \ldots$$

ce qui démontre en particulier que l'objet $\sum_{k=1}^{n} x_k$ dépend peut-être de n, du choix de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ mais *ne dépend en aucun cas de* k.

Egalement, une expression de la forme

$$\ll \sum_{n=1}^{n} x_n \gg$$

n'a aucun sens : l'indice de sommation (le n de x_n, celui qui se situe *sous* le symbole somme) est le même qu'un paramètre extérieur à la somme (le n situé au-dessus du symbole de notation). Il faudra bien prendre garde à ce que les indices de sommation choisis $(i, j, k, l, \ldots)$ n'interfèrent pas avec d'autres notations de l'exercice ou du problème.

La notation peut également s'étendre à des familles indexées de a à b avec $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=a}^{b} x_k = x_a + x_{a+1} + \cdots + x_b$$

avec la convention $\sum_{k=a}^{b} x_k = 0$ si $b < a$.

Certaines sommes se calculent par mécanisme de *télescopage*, ce que la proposition ci-dessous montre.

Proposition 1. (Calcul de sommes par télescopage).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} (u_{k+1} - u_k) &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_{N+1} - u_N) \\ &= u_{N+1} - u_0\end{aligned}$$

Exercice - Un exemple de télescopage. L'exemple ci-dessous est un grand classique dont une conséquence est la démonstration de l'existence de la somme infinie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un calcul de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
3. (*) Montrer que la quantité $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ peut être majorée par un réel indépendant de n.

Le résultat de certaines sommes (somme d'entiers consécutifs, de carrés d'entiers consécutifs, etc.) est connu et sera à connaître pendant la première année. On en recense dans la proposition ci-dessous, dont chacun des résultats peut être démontré par récurrence sur n.

Proposition 2. (Sommes classiques).
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. **Somme des n premiers entiers :**

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. **Somme des n premiers carrés d'entiers :**

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. **Somme des n premiers cubes d'entiers :**

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 8 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4. **Somme des termes d'une progression géométrique :** pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

5. **Formule de Bernoulli :** pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^0 b^{n-1} + a^1 b^{n-2} + \cdots + a^{n-1} b^0) = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

avec la convention algébrique $a^0 = b^0 = 1$ (même pour $a = 0$ ou $b = 0$).

Exercice - Démonstration des propositions. Démontrer les résultats des deux propositions précédentes (par récurrence sur n).

Exercice - Calcul de sommes. Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)$
2. $T_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$
3. $U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ pour $x \in \mathbb{R}$
4. $P_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)^2$ et $I_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$
5. (*) $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$

B Symbole produit $\prod$

De la même manière que le symbole somme, on peut définir le symbole produit comme suit.

Définition 5. (Symbole produit).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit l'objet $\prod_{k=1}^{n} x_k$ par

$\rightarrow$ $\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1$ si $n = 1$

$\rightarrow$ $\prod_{k=1}^{n} x_k = x_n \times \prod_{k=1}^{n-1} x_k$ sinon.

On convient que $\prod_{k=1}^{0} x_k = 1$ (« produit vide »).

Autrement dit, la quantité $\prod_{k=1}^{n} x_k$ peut également se représenter comme suit :

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$$

En particulier, on trouve les propriétés suivantes :
- toute permutation des termes d'un produit ne change pas sa valeur,
- pour tout $p \in \mathbb{N}$ et avec les mêmes notations : $\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^p = \prod_{k=1}^{n} x_k^p$,
- le produit $\prod_{k=1}^{n} x_k$ est nul si et seulement si $\exists i \in [\![1; n]\!], x_i = 0$ (c'est-à-dire : si l'un de ses facteurs est nul).

Ici, la notation k dans l'expression $\prod_{k=1}^{n} x_k$ représente un *indice muet*, dont le nom peut être changé à l'envi sans que le résultat du produit ne soit affecté :

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{j=1}^{n} x_j = \ldots$$

ce qui démontre en particulier qu'ici encore, l'objet $\prod_{k=1}^{n} x_k$ dépend peut-être de n, du choix de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ mais *ne dépend en aucun cas de* k.

La notation peut, comme pour le symbole somme, s'étendre à des familles indexées de a à b avec $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\prod_{k=a}^{b} x_k = x_a \times x_{a+1} \times \cdots \times x_b$$

avec la convention $\prod_{k=a}^{b} x_k = 1$ si $b < a$.

Certains produits se calculent par mécanisme de *télescopage*, ce que la proposition ci-dessous expose.

Proposition 3. (Calcul de produits par télescopage).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels *non nuls* et $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\prod_{k=0}^{N} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \cdots \times \frac{u_{N+1}}{u_N} = \frac{u_{N+1}}{u_0}$$

Exercice - Calculs de produits. Calculer les produits suivants, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $\prod_{k=1}^{n} 5$
2. $\prod_{k=1}^{n} (2^k)$
3. $\prod_{k=1}^{n} (2^n)$
4. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
5. $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k^2}\right)$
6. (*) $\prod_{k=1}^{n} \cos(2^k\theta)$

Pour le dernier calcul, θ est un nombre réel, ne pouvant s'écrire sous la forme $\theta = k\frac{\pi}{2^n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (on pourra se remémorer la formule donnant $\sin(2u) = \ldots$).

C Factorielle et coefficients binomiaux

Définition 6. (Factorielle).
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la **factorielle** de n, notée $n!$, par récurrence par

- $\rightarrow$ $n! = 1$ si $n = 0$
- $\rightarrow$ $n! = n \times (n-1)!$ si $n \geq 1$.

En d'autres termes, on a :

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k \;=\; n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

Au contraire de la forme utilisant le symbole $\prod$ (cf. exercice ci-dessous), la dernière expression, impliquant un produit et des points de suspension, ne permet pas d'appréhender la convention $0! = 1$, contenue par ailleurs dans la définition.

Exercice - Autre définition ?. Deux questions quant à la définition de la factorielle :

1. Que se serait-il passé si on avait adopté la définition « $n! = \prod_{k=0}^{n} k$ » ?
2. La formule $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ permet-elle de retrouver $0! = 1$?

Exercice - Calculs avec les factorielles. Voici quelques questions impliquant des factorielles.

1. Calculer $\dfrac{8!}{5!}$ et $\dfrac{12!}{7! \cdot 5!}$
2. Déterminer le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de $(10!)$.
3. (*) Même question pour $(100!)$.
4. Exprimer la dérivée 5ème de la fonction $f : x \mapsto x^{12}$ à l'aide de factorielles.

La notation factorielle prend une importance toute particulière en combinatoire (cf. la dernière partie de ce document). On la retrouve également dans les *coefficients binomiaux*, définis ci-dessous.

Définition 7. (Coefficients binomiaux).
Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On définit le **coefficient binomial** $\binom{n}{p}$ par

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } 0 \leq p \leq n \end{cases}$$

Le terme $\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n », pour des raisons que nous exposerons dans la partie consacrée à la combinatoire.

On adopte également la convention suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{n}{-1} = \binom{n}{-2} = \cdots = 0$$

Ceci nous permet alors d'affirmer, par exemple, que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}$ (même si $p > n$). Les propriétés des coefficients binomiaux sont énoncées ci-dessous.

Proposition 4. (Propriétés des coefficients binomiaux).
Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

1. **Premières valeurs :** $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
2. **Formule des compléments :** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
3. **Formule du triangle de Pascal :** $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
4. **Formule « du chef » :** $\binom{n+1}{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$.

Exercice - Démonstrations. Démontrer ces formules.

Parmi les formules énoncées ci-dessus, celle dite du triangle de Pascal, celle dont on trouve l'origine dans les travaux de combinatoire de Blaise Pascal, est celle qui a donné naissance au fameux triangle qui permet le calcul pratique des coefficients binomiaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

La règle régissant ce tableau est expliquée par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} A & + & B \\ & & \downarrow \\ & & C \end{pmatrix}$$

et permet ainsi le calcul de n'importe quel coefficient binomial sans recourir aux factorielles. En informatique, ceci est décisif dans le sens où un nombre tel que $20!$ est trop grand pour être évalué par une machine. En revanche, la formule de Pascal permettra sans aucun problème le calcul de $\binom{40}{20}$, par exemple, pour un ordinateur, par itération de la formule du triangle de Pascal.

Exercice - Calcul de coefficients binomiaux. Calculer les coefficients binomiaux suivants en utilisant la technique la plus économe :

1. $\binom{2}{10}$
2. $\binom{12}{4}$
3. $\binom{20}{19}$
4. $\binom{2020}{2018}$
5. $\binom{17}{4}$
6. $\binom{14}{7}$

D Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton permet le calcul de $(a+b)^n$ pour tous nombres réels a, b et tout entier n. Elle constitue donc une généralisation des « identités remarquables » connues :

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

Théorème III.1. (Formule du binôme de Newton).
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On a alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

avec la convention $0^0 = 1$.

Démonstration.
Cette formule se démontre en fixant a et b et en raisonnant par récurrence sur n. Au milieu de la phase d'hérédité intervient la formule du triangle de Pascal.
Cette démonstration sera détaillée en début de première année.

□

Notons que cette formule se « retourne », en inversant les rôles de a et b, puisqu'on sait que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^n = (b+a)^n$. Ceci se note en faisant un *changement d'indice* $i = n - k$ dans la somme du théorème, donnant :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} a^{n-i} b^i$$

en notant que, d'après la formule des compléments, $\displaystyle\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$.

L'exercice ci-dessous a pour objectif de faire manipuler cette formule.

Exercice - Applications de la formule du binôme de Newton. On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Développer $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)^4$ et $(a-b)^4$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

(Indication pour la dernière question : on pourra remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $1^k = 1^{n-k} = 1$).

Exercice - Linéarisations trigonométriques. On fixe $x \in \mathbb{R}$. On rappelle les *formules d'Euler* :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

1. Exprimer $\cos^4(x)$ en fonction de termes de la forme e^{ikx} avec $k \in [\![0;4]\!]$.
2. En déduire, toujours en utilisant les formules d'Euler, une expression de $\cos^4(x)$ en fonction de termes de la forme $\cos(kx)$ pour $k \in [\![0;4]\!]$.
   Ceci constitue la *linéarisation* de l'expression $\cos^4(x)$.
3. Proposer une linéarisation de l'expression $\sin^5(x)$ en imitant la méthode ci-dessus.

IV Analyse de la variable réelle

A Introduction aux notions de limite et de continuité

La notion de limite est à la base de toutes les notions d'analyse de classes préparatoires. Nous ne comptons pas ici en donner une définition exacte, tant il faudrait distinguer de cas :

— limite finie d'une fonction en un point fini,
— limite infinie d'une fonction en un point fini,
— limite finie d'une fonction en un point infini,
— limite infinie d'une fonction en un point infini.

Nous nous contenterons de l'idée que la limite d'une fonction f en un point a, fini ou infini, est la valeur de laquelle se rapproche $f(x)$ lorsque x tend vers a, si une telle valeur existe. Par exemple, il est impossible d'identifier une telle valeur pour la fonction $x \mapsto \cos(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$: la fonction semble osciller sans jamais se rapprocher d'une valeur particulière.

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est alors dite continue en un point $a \in I$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a, c'est-à-dire si $f(x)$ se rapproche bien de $f(a)$ lorsque x tend vers a.

Par exemple :

— considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $a = 2$.
Il semble bien que $f(x)$ se rapproche de $f(2) = 5$ lorsque x tend vers 2, ce qui illustre la continuité de f en 2.
Il se trouve aussi que ce raisonnement s'étend à n'importe quel $a \in \mathbb{R}$ pour cette fonction f : on dit alors qu'elle est **continue sur** $\mathbb{R}$.

— considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \geq 0$ par $g(x) = 1$ et pour tout $x < 0$ par $g(x) = -1$.
Il semble que $g(x)$ se rapproche de 1 pour x tendant vers 0 *par valeurs supérieures*, alors que $g(x)$ se rapproche de -1 pour x tendant vers 0 *par valeurs inférieures*.
Ainsi, $g(x)$ ne semble pas tendre vers une valeur déterminée lorsque x tend vers 0 sans autre précision. On dit alors que g **n'admet pas de limite** pour x tendant vers 0.
En particulier, $g(x)$ ne semble pas du tout se rapprocher de $g(0) = 1$ pour x tendant vers 0 : on dit alors que g présente une discontinuité en $x = 0$, ou bien que g n'est pas continue en 0.

La continuité de f sur un intervalle se traduit graphiquement par le fait que sa courbe représentative est « d'un seul tenant », comme si on pouvait la tracer sans lever le crayon, alors que ce n'est pas le cas de la courbe de g. Celle-ci présente en effet un « saut de discontinuité » en $x = 0$.

Dans la pratique, la continuité est une propriété qui caractérise l'essentiel des fonctions usuelles sur leur domaine de définition :

— les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$,

— les fonctions puissances positives ($x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha > 0$) sont continues sur $\mathbb{R}_+$ − en particulier, la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ appartient à cette catégorie,
— les fonctions $\exp$, $\cos$, $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$,
— la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
— etc.

La continuité est une propriété qui se « transmet » par **opérations usuelles**, également :
— si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors $f+g$ et fg sont des fonctions continues sur I,
— si f est une fonction continue sur I et *qui ne s'annule pas sur* I, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur I,
— si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, respectivement sur I et sur J, alors la fonction *composée* $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$, définie sur I, est continue sur I.

C'est par exemple cette dernière propriété qui permet d'affirmer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$:
— la fonction $x \mapsto x^2+1$ est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
— la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
donc, par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice - Continuité de fonctions. Déterminer le domaine de continuité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos^2(x)$
2. $x \mapsto x^3 - x^2 + 1$
3. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $x \mapsto e^{-x^2/2}$
5. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$
6. $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
7. (*) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

B Dérivabilité, dérivation

La dérivabilité d'une fonction de la variable réelle, en un point ou sur un intervalle, se définit comme suit.

Définition 8. (Dérivabilité en un point / sur un intervalle - Fonction dérivée).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable réelle, définie sur un intervalle I de longueur non nulle. Soit $a \in I$.

1. On dit que f **est dérivable en** a si la fonction[a] $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, définie sur $I \backslash \{a\}$, admet une limite finie lorsque x tend vers a.
   Cette limite finie, si elle existe est appelée **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.
2. On dit que f **est dérivable sur** I si f est dérivable en tout point $a \in I$. Dans ce cas, l'existence de $f'(a)$ est garantie pour tout $a \in I$ et la fonction $x \mapsto f'(x)$ ainsi définie est appelée **fonction dérivée** de f (ou simplement **dérivée** de f).

a. cette fonction est couramment appelée *taux d'accroissement en* a.

La dérivabilité d'une fonction est une propriété de *régularité* plus forte, c'est-à-dire plus restrictive, que la continuité. Reprenant les mêmes notations, nous verrons que si f est dérivable en a, alors f est nécessairement continue en a. Autrement dit :

$$(f \text{ dérivable en } a) \Rightarrow (f \text{ continue en } a)$$

Nous reprendrons les formules de dérivation des fonctions usuelles vues dans le secondaire, les supposant connues. Un des exercices ci-dessous propose, par curiosité, de retrouver certaines de ces formules, par examen de la limite du taux d'accroissement en chaque point du domaine de dérivabilité.

Dans la pratique, la dérivabilité est une propriété qui caractérise l'essentiel des fonctions usuelles sur leur domaine de définition, à l'exception notable de la fonction racine carrée et des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$, continues sur $\mathbb{R}_+$ mais dérivables uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$:
- les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$,
- les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée égale à $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. Seules celles avec $\alpha \geq 1$ ou $\alpha = 0$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Par exemple, **la fonction** $x \mapsto \sqrt{x}$ **n'est pas dérivable en** 0.
- les fonctions $\exp$, $\cos$, $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées respectives sont données par $\exp'(x) = \exp(x)$, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée donnée par $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$,
- etc.

La dérivabilité est également une propriété qui se transmet par **opérations usuelles** :

- **Somme de fonctions dérivables :** soit f et g deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f + g$ est aussi dérivable sur I et $\boxed{(f + g)' = f' + g'}$.

- **Produit de fonctions dérivables :** soit f et g deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors fg est aussi dérivable sur I et $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$.

— **Quotient de fonctions dérivables :** soit f et g deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur I.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est aussi dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}}$.

— **Dérivée d'une composée :** soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec I, J deux intervalles réels de longueur non nulle. On suppose que f est dérivable sur I et g, dérivable sur J.
Alors $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est dérivable sur I et $\boxed{(g \circ f)' = f' \times g' \circ f}$.

La dernière propriété n'est pas au programme du lycée, elle est pourtant très utilisée dans la pratique, comme le suggère l'exemple suivant. Considérons la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. Une rapide étude par discriminant montre que le trinôme $x^2 - 3x + 2$, défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, s'annule en 1 et en 2 et est positif ou nul si et seulement si $x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$.
Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est définie (et continue) sur $]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$. Pourtant, comme le trinôme $x^2 - 3x + 2$ s'annule en 1 et en 2, et comme la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est alors dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ n'est dérivable que sur $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ (bien noter les bornes ouvertes !).

Exercice - Dérivabilité et calcul de dérivées. Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en précisant le domaine de dérivabilité de chacune d'entre elles.

1. $x \mapsto x^3 + x + 1$
2. $x \mapsto x\sqrt{x} - \ln(x)$
3. $x \mapsto e^{x+1}$
4. $x \mapsto \cos^2(x)\sin(x)$
5. (*) $x \mapsto \sqrt{x^3 - 2x + 1}$
6. $x \mapsto \tan(x)$
7. (*) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$
8. (*) $x \mapsto \ln(e^{\sqrt{x}} + 1)$

Exercice - Fonction racine carrée en 0. On se propose ici de constater que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

1. Montrer que le taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de limite finie pour $x \to 0^+$. En déduire le résultat recherché.
2. (*) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ pour que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ soit dérivable en 0.

Exercice - Où on retrouve la dérivée de fonctions usuelles. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les limites suivantes lorsque $x \to a$ avec $x \neq a$ pour chacune des fonctions suivantes et retrouver la formule de dérivation usuelle qu'elles permettent de justifier.
On notera que, comme il s'agit de formes indéterminées, quelques étapes de calcul seront nécessaires pour « débloquer » les expressions et permettre le calcul de la limite.

1. $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$
2. $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$ (avec $a > 0$)
3. (*) $\dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a}$
4. (*) $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Pour la troisième question, on pourra remplacer x par $(x - a) + a$ avant de s'engager dans des calculs. On admettra également, pour cette même question, les limites suivantes :

$$\frac{\sin(u)}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\cos(u) - 1}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$$

C Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

La théorie de l'intégration s'appuie sur une définition de l'objet « intégrale ». Cette définition, donnée sous forme d'intuition dans le secondaire et associée à une interprétation en termes d'aire, n'est pas davantage précisée dans la filière ECG. De manière sous-jacente, l'intégrale qui est étudiée en classes préparatoires est l'intégrale de Riemann, dont la définition correspond à l'intuition géométrique donnée dans le secondaire : lorsque $a \leq b$, l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ correspond à l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette aire est comptée *algébriquement*, c'est-à-dire qu'elle est comptée négativement lorsque la courbe de f se situe sous l'axe des abscisses et positivement lorsque la courbe de f se situe au-dessus de l'axe des abscisses.

La définition de l'intégrale en ECG s'appuie sur la notion de primitive, essentielle pour le calcul de celles-ci.

Définition 9. (Primitive d'une fonction continue sur un intervalle).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Une **primitive** de f sur I est une application $F : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I et vérifiant $F' = f$.

L'absence de définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction sur un segment nous pousse à admettre le fait suivant, qui est loin d'être évident : **toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive**.

D'après la définition ci-dessus, « primitiver » une fonction correspond, avec beaucoup de guillemets, à l'« opération inverse » de la dérivation et consiste à trouver une fonction dont l'expression en présence est la dérivée. Ce travail de reconnaissance fait donc de l'intégration une opération plus difficile que la dérivation, puisqu'il existe de nombreuses fonctions dont on ne connaît pas de primitive sous forme explicite, alors qu'à l'inverse, il est assez rare de se retrouver dans l'incapacité de dériver une fonction dérivable dont on possède une expression explicite.

Toutefois, il existe des techniques de calcul (intégration par parties, changement de variable, cf. section suivante) qui permettent de passer certains écueils.

La proposition ci-dessous caractérise l'ensemble des primitives d'une fonction continue sur un intervalle.

Proposition 5. (Primitives d'une fonction continue sur un intervalle).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On considère une primitive F de f sur I.
Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme $F + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$x \mapsto F(x) + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$, indépendant de x.
Sous forme ensembliste, l'ensemble des primitives de f sur I est donné par

$$\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

où, pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $F + c$ est la fonction $x \mapsto F(x) + c$ définie sur I.
En particulier, les primitives de f sur I sont « égales à une constante (additive) près ».

D Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Ainsi posée, la notion de primitive permet de proposer une définition de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition 10. (Intégrale d'une fonction continue sur un segment).
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur un intervalle I de longueur non nulle et contenant les points a et b. Soit F une primitive de f sur cet intervalle. On définit alors l'**intégrale de f entre a et b** par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Etant donné que les primitives de f sur I diffèrent d'une constante, la quantité ci-dessus ne dépend pas du choix effectué quant à la primitive de f.

Etant donné cette définition, l'objet $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'est bien défini qu'à condition que f soit une fonction continue *a minima* sur le segment $[a; b]$ – ou $[b; a]$ si $b \leq a$. Nous verrons dans l'année qu'il sera notamment possible d'élargir cette définition à des fonctions non nécessairement continues et à des intervalles autres que des segments.

Ainsi définie, l'intégrale vérifie alors les propriétés suivantes, rassemblées dans la proposition ci-dessous.

Proposition 6. (Propriétés de l'intégrale).
Soit I un intervalle réel de longueur non nulle et f, g deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a alors les propriétés suivantes :

— **Linéarité de l'intégrale.** Pour tous $a, b \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

— **Positivité de l'intégrale.** Pour tous $a, b \in I$, si f est positive entre les points a et b et si $a \leq b$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

— **Relation de Chasles.** Pour tous points $a, b, c \in I$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

En particulier, pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \text{ et } \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Exercice - Démonstration des propriétés de l'intégrale. A l'aide de la définition donnée plus haut pour l'intégrale de f entre les points a et b, démontrer les propriétés ci-dessus.

Exercice - Calcul d'intégrales (1). Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur bonne définition.

1. $\displaystyle\int_0^2 t^3 \cdot dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}$
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2 \cdot dt}{t^4}$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(3t) \cdot dt$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cdot dt$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t) \cdot dt$
7. $\displaystyle\int_0^1 e^{-t/2} \cdot dt$
8. $\displaystyle\int_0^1 t \cdot e^{-t^2} \cdot dt$
9. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$

E Techniques d'intégration : intégration par parties, changement de variable

Il arrive – souvent – qu'on ne puisse pas directement donner une primitive de la fonction à intégrer. Dans ce cas, il existe des techniques de calcul qui permettent de débloquer la situation. Nous en proposons deux ici : l'intégration par parties et le changement de variable. Ces techniques seront revues en première année de la filière ECG.

- **Intégration par parties.**

La formule d'intégration par parties s'appuie sur la formule dérivation d'un produit de fonctions. Etant donné un couple de fonctions u, v dérivables et de dérivée continue sur un intervalle I de longueur non nulle et étant donné $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b [u'(t)v(t) + u(t)v'(t)] \cdot dt = \int_a^b (uv)'(t) \cdot dt = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Proposition 7. (Formule d'intégration par parties).
Soit I un intervalle réel de longueur non nulle et u, v deux fonctions dérivables sur I et de dérivée continue sur I [a].
On a alors, pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'(t)v(t) \cdot dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) \cdot dt$$

Le terme $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ est aussi appelé *terme de crochet* et noté $[u(t)v(t)]_a^b$

a. on dit aussi que u et v sont supposées *de classe* C^1 sur I.

L'intérêt de cette formule est de transformer une intégrale *a priori* sans primitive identifiable en une intégrale plus facilement calculable.

Prenons l'exemple de l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \ln(t) \cdot dt$$

On ne connaît pas forcément de primitive à la fonction $t \mapsto \ln(t)$, cependant, on peut penser à réécrire les choses de la manière suivante :

$$\int_1^2 1 \cdot \ln(t) \cdot dt$$

en voyant 1 comme l'expression de la dérivée de la fonction $t \mapsto t$. On applique alors la formule d'intégration par parties à l'aide des fonctions suivantes :

$$\begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Les deux fonctions ainsi définies sont de classe C^1 (dérivables et de dérivée continue sur $[1; 2]$), ce qui rend possible l'application de la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(t) \cdot dt &= [t\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 t \cdot \frac{1}{t} \cdot dt \\ &= 2\ln(2) - 0 - \int_1^2 1 \cdot dt \\ &= 2\ln(2) - 1 \end{aligned}$$

Exercice - Calcul d'intégrales (2) - Intégration par parties. Calculer les intégrales suivantes, en appliquant la formule d'intégration par parties avec les fonctions indiquées. Pour les dernières questions, on n'indique plus les fonctions. Plusieurs intégrales par parties d'affilée sont parfois requises pour ces dernières questions.

1. $\displaystyle\int_0^2 t \cdot e^{2t} \cdot dt$ avec $u'(t) = e^{2t}$ et $v(t) = t$
2. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} t \cdot \sin(t) \cdot dt$ avec $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3 \cdot e^{-t^2/2} \cdot dt$ avec $u'(t) = te^{-t^2/2}$ et $v(t) = t^2$
4. $\displaystyle\int_1^e t\ln(t) \cdot dt$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t \cdot \cos^2(t) \cdot dt$
6. (*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t) \cdot e^t \cdot dt$ (par double IPP)

- **Changement de variable.**

La technique de changement de variable est une autre technique de calcul, utile pour débloquer certaines situations. Sa difficulté réside principalement dans la détermination du changement de variable le plus efficace pour parvenir à ses fins.

Proposition 8. (Formule de changement de variable).
Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle. On considère une fonction f continue sur I et une fonction φ, le *changement de variable*, définie sur J, de classe C^1 sur J et à valeurs dans I. Soit $a, b \in J$.
On a alors

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) \cdot du$$

Dans la pratique, on dit que pour passer de la première intégrale à la seconde, on a effectué le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = \varphi(t) \\ du = \varphi'(t)dt \end{cases}$$

en notant que pour t variant de a à b, u varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. Le seul argument permettant de valider un changement de variable pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment est le caractère C^1 de la fonction de changement de variable.

Dans un changement de variable, lorsqu'on a envie de poser $u = \varphi(t)$, il y a alors quatre étapes à mener :

1. **hypothèses :** vérifier que la fonction de changement de variable, φ, est bien C^1 sur le segment où t prend ses valeurs,

2. **changement de variable :** remplacer tous les $\varphi(t)$ par des u
3. **changement du terme différentiel :** remplacer le terme différentiel $\varphi'(t)dt$ par du
4. **changement des bornes :** remplacer les bornes en se demandant, lorsque t évolue entre a et b, entre quelles valeurs évolue u.

Prenons quelques exemples.

1. **Exemple 1 :** calcul de $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$.

   La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est bien C^1 sur le segment $[1;4]$. Par ailleurs, en posant $u = \sqrt{t}$, on a $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, c'est-à-dire, $2 \cdot du = \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$. Puis, lorsque t évolue entre 1 et 4, $u = \sqrt{t}$ évolue entre 1 et 2.
   Ainsi, on a :
   $$\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}} = \int_1^2 2e^{-u} \cdot du$$
   L'intégrale obtenue à l'issue du changement de variable est très facilement calculable, contrairement à celle dont on partait.
   On conclut ainsi :
   $$\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{t}}dt}{\sqrt{t}} = \int_1^2 2e^{-u} \cdot du = 2(e^{-1} - e^{-2})$$

2. **Exemple 2 :** calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ à l'aide du changement $t = \tan(u)$.

   Ici, le changement n'est pas donné sous la forme $u = \varphi(t)$, mais sous la forme $t = \psi(u)$, ce qui montre qu'on fait un changement de variable « à l'envers », c'est-à-dire en partant de la forme finale de la proposition pour arriver à la forme initiale .
   La fonction $u \mapsto \tan(u)$ est de classe C^1 sur $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$: il faut voir que pour que t évolue entre 0 et 1, il faut que u évolue entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.
   Pour ce qui est du terme différentiel :
   $$dt = \tan'(u) \cdot du = (1 + \tan^2(u)) \cdot du = (1 + t^2) \cdot du$$
   Ainsi, on note que $\dfrac{dt}{1+t^2}$ se remplace par du, ainsi :
   $$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\pi/4} du = \frac{\pi}{4}$$
   où on s'aperçoit de nouveau que le changement de variable (« dans l'autre sens », cette fois) a permis de simplifier considérablement le calcul.

Exercice - Calcul d'intégrales (3) - Changement de variable. Calculer les intégrales suivantes, en effectuant (et en justifiant) le changement de variable proposé.

1. $\int_{-1}^{1} (3t+4)^5 dt$ avec $u = 3t+4$
2. $\int_{0}^{1/4} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ avec $u = 1-x^2$
3. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$ avec $u = \ln(x)$
4. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot dx$ avec $x = \sin(u)$
5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx$ avec $u = \sin(x)$

V Eléments de combinatoire

La **combinatoire**, aussi appelée **dénombrement**, est cette partie des mathématiques qui consiste à compter les éléments d'un ensemble fini, défini par une propriété, par exemple :

— combien peut-on former de couples d'entiers pairs à l'aide d'entiers choisis entre 1 et n ?

— combien de lancers de 2 dés donnent un total de 7 ?

— combien d'anagrammes peut-on former du mot « combinatoire » ? (sans se préoccuper de leur sens)

— etc.

Ces questions peuvent être parfois résolues par un dénombrement exhaustif : par exemple, on aura relativement vite fait de dresser la liste des lancers de 2 dés qui permettent d'aboutir à un total de 7. En revanche, le même genre de méthode appliquée au problème des anagrammes demandera beaucoup plus de patience. Enfin, dans le cas des couples d'entiers pairs, il est illusoire d'espérer dresser une liste exhaustive de tels couples, puisque n est un paramètre théorique.

Heureusement, il existe des « formules de dénombrement », que nous abordons dans cette partie et qui permettent de traiter ce genre de situation. Ainsi, la principale difficulté en combinatoire est de parvenir à identifier, dans chaque problème posé, la ou les « situations de cours », la ou les « formules de dénombrement » qui lui correspondent.

Les questions de dénombrement apparaissent notamment dans des calculs de probabilités, qui sont un domaine central dans la filière ECG. Ce chapitre, abordé en fin de premier semestre, est donc d'une importance centrale. Nous proposons ici une introduction à ces notions qui, de toute façon, seront reprises en première année.

A Cardinaux, ensembles finis

Nous nous contenterons de la définition suivante pour caractériser les ensembles finis.

Définition 11. (Ensemble fini, cardinal).
Un ensemble fini est un ensemble vide ou comptant un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments *distincts* que contient un ensemble fini est appelé son **cardinal**.
Par convention, l'ensemble vide est de cardinal égal à 0, c'est d'ailleurs le seul ensemble fini qui vérifie cela.
Etant donné un ensemble fini E, on note son cardinal $\mathrm{Card}(E)$.

On rappelle que l'ensemble vide est noté $\emptyset$. Il s'agit donc d'un ensemble fini, le seul de cardinal nul.

La remarque ci-dessous peut être évitée pour le moment, puisqu'elle fait référence à la notion de bijection, dont une définition sera donnée dans les premières semaines en ECG-1.

Remarque - Une définition de la notion d'ensemble fini. En réalité, un ensemble fini est un ensemble dont les éléments peuvent être mis en correspondance « un pour un » (Cantor utilise le terme de correspondance *biunivoque*) avec les éléments d'une partie majorée de $\mathbb{N}$.
Un autre terme pour cela est celui de **bijection** : un ensemble E est fini s'il est vide ou si on peut trouver un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et une *application bijective* $\varphi : E \to [\![1; n]\!]$. Une telle bijection correspond à une *numérotation* des éléments de l'ensemble E.

Par exemple :
- l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ est fini, il compte 4 élements, donc son cardinal est 4.
- plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[\![0; n]\!]$, c'est-à-dire $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, est fini et compte $(n + 1)$ éléments.
  Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$, l'ensemble $[\![a; b]\!]$ compte $(b - a + 1)$ éléments.
- etc.

Exercice - Premiers dénombrements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul.
1. Combien y a-t-il d'entiers naturels compris, au sens large, entre 1589 et 1610 ? Durant combien d'années pleines le roi Henri IV a-t-il régné ?
2. Combien y a-t-il d'entiers pairs compris entre 0 et $2n$? (au sens large)
3. Combien y a-t-il d'entiers pairs compris entre $-n$ et n ? (au sens large)
4. Combien y a-t-il de multiples de 7 compris entre 1610 et 2020 ? Il est hors de question d'en donner une liste exhaustive.

Etant donné un ensemble fini E, il va de soi que tout **sous-ensemble**, ou **partie**, de cet ensemble est également fini et que son cardinal est inférieur ou égal au cardinal de E.

Proposition 9. (Ensemble des parties d'un ensemble fini).
Soit E un ensemble fini. Une partie de E est un sous-ensemble de E, c'est-à-dire un ensemble F tel que $\forall x \in F, x \in E$ (propriété qu'on note aussi $F \subset E$).
Toute partie F de E est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à E. L'ensemble des parties de E étant noté $\mathcal{P}(E)$, on a donc :

$$\forall F \in \mathcal{P}(E),\ \mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E).$$

Notamment, si F et G sont deux parties d'un ensemble fini E, on a les propriétés suivantes :
- **Cardinal total :** $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$ si et seulement si $F = E$
- **Cardinal nul :** $\mathrm{Card}(F) = 0$ si et seulement si $F = \emptyset$
- **Cardinal d'une réunion disjointe de parties :** si $F \cap G = \emptyset$ (c'est-à-dire si F et G sont deux parties *disjointes*), alors $\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G)$
- **Formule du crible de Poincaré :** $\mathrm{Card}(F \cup G) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(F \cap G)$.

Exercice - Ensemble des parties. Déterminer l'ensemble des parties des ensembles suivants (a, b, c sont des éléments deux-à-deux distincts) :

1. $\{a, b, c\}$
2. $[\![1; 4]\!]$
3. $\{10, 24\}$
4. $\emptyset$
5. $\{\emptyset\}$
6. (*) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(pour le dernier ensemble, on pourra commencer par identifier son cardinal)
Que conjecturer sur le nombre de parties d'un ensemble fini de cardinal n ?

Exercice - Quelques applications. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$ et $c \leq d$. Déterminer le cardinal des ensembles suivants :

1. $[\![a; b]\!] \cup [\![c; d]\!]$ dans le cas où $b < c$
2. $[\![a; b]\!] \cup [\![c; d]\!]$ dans le cas où $b \leq c$
3. $[\![a; b]\!] \cup [\![c; d]\!]$ dans le cas où $b \geq c$

B Cardinaux de référence

Dans cette partie, nous donnons des formules de dénombrement dans certaines situations générales (ensemble des parties d'un ensemble fini, ensemble des parties de cardinal donné d'un ensemble fini, etc.). Ces formules ont vocation à être adaptées pour être utilisées dans des situations de dénombrement plus concrètes, proposées dans les exercices.

- **Nombre de parties d'un ensemble fini**

L'ensemble des parties d'un ensemble fini est lui-même un ensemble fini. Son cardinal est donné par la proposition ci-dessous.

Proposition 10. (Nombres de parties d'un ensemble fini).
Ètant donné un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}$, le nombre de parties de E est égal à 2^n, cardinal qu'on peut résumer ainsi :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

On notera, pour ce dénombrement comme pour nombre des suivants, que le résultat ne dépend que du *cardinal* de l'ensemble fini considéré et aucunement de la nature des éléments qu'il contient. Ainsi, le nombre des parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est le même que celui des parties de l'ensemble $\{\emptyset, 45, \pi\}$ (à savoir $2^3 = 8$), bien que la nature des éléments de ces deux ensembles soit radicalement différente et que les parties de ces ensembles n'aient rien à voir entre elles.

Exercice - Parties de l'ensemble vide. Cette formule convient-elle pour l'ensemble vide ?

- **Nombre de parties de cardinal donné d'un ensemble fini / Combinaisons**

L'objet de ce dénombrement est de s'intéresser au nombre de parties d'un ensemble fini qui comptent un nombre donné d'éléments, c'est-à-dire, étant donné $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de parties d'un ensemble à n éléments comptant p éléments.

On voit par exemple que si $p > n$, on ne compte aucune partie de la sorte, que si $p = n$, on en compte une (l'ensemble tout entier), même chose pour $p = 0$ (l'ensemble vide), etc. Par exemple, pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, les parties à 2 éléments de E sont

$$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\},$$

on en compte donc 6.

Le résultat suivant est donné par l'encadré qui suit.

Proposition 11. (Nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n).
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in \mathbb{N}$. L'ensemble des parties de E comptant p éléments est égal à $\binom{n}{p}$, c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \end{cases}$$

De telles parties sont également appelées **combinaisons à p éléments pris parmi n**.

Exercice - Une idée de la preuve. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On souhaite retrouver le nombre C de parties de E comptant 3 éléments de deux manières différentes.

1. Déterminer C en utilisant la formule ci-dessus.
2. Justifier que les parties de E comptant 3 éléments et *contenant l'élément* 5 sont en même nombre que les parties de $F = \{1, 2, 3, 4\}$ comptant 2 éléments. On note C_1 ce nombre, le déterminer.
3. Justifier que les parties de E comptant 3 éléments et *ne contenant pas l'élément* 5 sont en même nombre que les parties de $F = \{1, 2, 3, 4\}$ comptant 3 éléments. On note C_2 ce nombre, le déterminer.
4. On remarque que $C = C_1 + C_2$. Expliquer cela.
5. (*) Généraliser le raisonnement avec E comptant n éléments et $p \in \mathbb{N}$ quelconque au lieu de 3.

Exercice - Quelques mises en situation. Voici quelques dénombrements pour lesquels on essaiera de reconnaître le cadre d'application de la formule ci-dessus.

1. Combien de mains de 5 cartes différentes peut-on composer lorsqu'on les prend dans un jeu de 52 cartes classique ? (l'ordre de distribution ne compte pas)
2. Combien de mains de 5 cartes différentes, ne contenant pas de valet, peut-on composer, en les prenant dans un jeu de 52 cartes ?
3. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue 5 tirages successifs sans remise, en notant les nombres obtenus sans tenir compte de l'ordre de leur apparition. Combien cela donne-t-il de combinaisons possibles ?

Le dénombrement des combinaisons à p éléments pris dans un ensemble fini de cardinal n correspond donc à un tirage *sans remise*, et sans tenir compte de l'ordre d'apparition des éléments.

- **Nombre de p-listes à valeurs dans un ensemble fini.**

L'objet de ce dénombrement est, pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, de compter le nombre de p-listes, ou p-uplets, de la forme $(x_1, \ldots, x_p)$ avec $x_1, \ldots, x_p$ prenant leurs valeurs dans un ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

La différence entre les objets mathématiques

$$(x_1, \ldots, x_p) \text{ et } \{x_1, \ldots, x_p\},$$

le premier étant un p-uplet et le second un ensemble, tient dans le fait que l'ordre des éléments importe dans le p-uplet, alors qu'il n'a aucune importance dans l'ensemble. Par exemple :

$$(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$$

alors que

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}.$$

Etant donné un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, pour composer un p-uplet d'éléments de E, on a donc n choix pour sa première composante, puis, pour chacun de ces choix, on a à nouveau n choix pour la seconde, puis, etc. D'où le résultat suivant.

Proposition 12. (Nombre de p-listes d'éléments pris dans un ensemble de cardinal n).
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ composés d'éléments de E est égal à n^p.

La notation ensembliste pour l'ensemble des p-uplets de E est un produit cartésien :

$$E \times E \times \cdots \times E = E^p$$

Par exemple, l'ensemble des couples (x, y) formés d'éléments de E est noté E^2. La notation de produit cartésien est d'ailleurs générale : E^p désigne l'ensemble des p-uplets d'éléments de E (exemple : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, etc.).

Le cardinal trouvé ci-dessus prolonge cette notation, puisqu'il s'agit de la formule suivante :

$$\mathrm{Card}(E^p) = (\mathrm{Card}(E))^p$$

Exercice - Quelques mises en situation. Voici quelques dénombrements pour lesquels on essaiera de s'appuyer sur la formule précédente.

1. Combien de mots de 5 lettres peut-on écrire à l'aide des lettres E, C, S ? (ces « mots » peuvent n'avoir aucun sens)
2. Combien compte-t-on de nombres à 2 décimales inférieurs à 100 ?
3. Combien compte-t-on de nombres à 2 décimales inférieurs à 95 et ne contenant pas le chiffre 5 ?
4. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue 5 tirages avec remise, en notant les nombres obtenus dans l'ordre de leur apparition. Combien cela donne-t-il de combinaisons possibles ?

Le dénombrement des p-uplets d'éléments pris dans un ensemble fini de cardinal n correspond donc à un tirage *avec remise*, en tenant compte de l'ordre d'apparition des éléments.

- **Nombre de p-listes sans répétitions à valeurs dans un ensemble fini / Arrangements.**

On s'intéresse cette fois au dénombrement des p-listes composées d'éléments pris dans un ensemble fini, sans répétition, c'est-à-dire composées d'éléments deux-à-deux distincts. Un tel p-uplet est appelé un **arrangement à p éléments pris parmi n**.

Pour dénombrer de tels p-uplets, on considère qu'on a n valeurs possibles pour la première composante, puis, pour chacune de ces valeurs, $(n-1)$ valeurs possibles pour la seconde (n moins la valeur prise pour la première), puis $(n-2)$ pour la suivante, etc. On obtient alors le dénombrement suivant.

Proposition 13. (Nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n).
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et un entier $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-uplets d'éléments distincts pris dans E est donc égal à

$$\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \end{cases}$$

Exercice - Quelques arrangements. Etudier les situations suivantes, pour lesquelles on essaiera de retrouver le cadre de la formule ci-dessus.

1. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ABSURDITE ».
2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue 5 tirages sans remise, en notant les nombres obtenus dans l'ordre de leur apparition. Combien cela donne-t-il de combinaisons possibles ?

Le dénombrement des arrangement à p éléments pris dans un ensemble fini de cardinal n correspond donc à un tirage *sans remise*, et en tenant compte de l'ordre d'apparition des éléments.

- **Nombre de permutations.**

Une **permutation** d'un ensemble fini E de cardinal n est un n-uplet composé des éléments de E pris une et une seule fois. C'est, en quelque sorte, un n-uplet correspondant à une façon d'ordonner les éléments de E.

Remarque sur la notion mathématique de permutation. En réalité, la définition mathématique d'une permutation est la suivante : une permutation de E est une application bijective de E dans lui-même (définition valable également pour des ensembles infinis). Cette dernière définition ouvre sur l'étude de l'ensemble des permutations d'un ensemble E qui, muni de l'opération de composition d'applications, acquiert une structure algébrique de groupe. Ces développements étant hors programme de la filière ECG, nous nous contenterons d'aborder les permutations du point de vue du dénombrement.

D'après la définition donnée avant la remarque ci-dessus, une permutation d'un ensemble E de cardinal n n'est rien d'autre qu'un arrangement à n éléments pris parmi ceux de E. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 14. (Nombre de permutations d'un ensemble fini).
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de permutations de E est alors égal à $n!$.
On convient que l'ensemble vide possède une seule permutation.

Exercice - Lien entre le nombre d'arrangements et de combinaisons. Considérons $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Donner le nombre C_3 de combinaisons à 3 éléments de E et le nombre A_3 d'arrangements à 3 éléments de E.
2. On pose $F = \{1, 4, 6\}$: c'est une combinaison à 3 éléments de E. Combien y a-t-il de permutations de F ?
3. Expliquer pourquoi on a $A_3 = 3! \times C_3$.
4. Généraliser le raisonnement pour un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier $p \in [\![0; n]\!]$, en expliquant le lien entre le nombre d'arrangements à p éléments de E et de combinaisons à p éléments de E.

C Exercices de dénombrement

Dans cette section, l'objectif est d'appliquer les dénombrements vus dans la section précédente à des situations concrètes. La principale difficulté, en combinatoire, se situe dans le fait de ramener de telles situations à des formules de dénombrement.

- **Exemple 1 : mains de poker contenant exactement une paire :** *combien de mains distinctes de 5 cartes, prises dans un jeu de 52 cartes et contenant exactement une paire, peut-on constituer ?*

On suppose ici que l'ordre de distribution des cartes ne doit pas être pris en compte. Une main de 5 cartes est un ensemble de 5 cartes distinctes pour lequel l'ordre de distribution des cartes n'a aucune importance. Par exemple, au tarot ou au bridge, l'ordre dans lequel on vous a donné vos cartes vous importe peu, ce qui compte, c'est ce que votre *main* contient. C'est le point de vue adopté ici.

Une main telle que recherché se compose donc :
- — d'une paire, déterminée par la « hauteur[2] » de cette paire puis, étant donné cette hauteur, d'un choix de deux couleurs parmi quatre (pique, carreau, coeur, trèfle),
- — de trois autres cartes, de hauteurs deux-à-deux distinctes (on cherche « exactement une paire ») et différentes de la hauteur de la paire. Pour chacune de ces trois cartes, quatre couleurs sont possibles.

Une fois ce petit « état des lieux » effectué, il nous reste donc à dénombrer les possibilités :
- — pour la paire : sa hauteur est à choisir parmi 13 hauteurs différentes. Pour chaque choix de hauteur, le choix des couleurs revient à faire le choix de deux éléments, sous forme de *combinaison*, parmi un ensemble en comptant quatre : $\{$ pique, carreau, trèfle, coeur $\}$.
  Cela nous fait donc $13 \times \binom{4}{2} = 13 \times 6 = 78$ choix possibles pour la paire.
- — étant donné un choix pour la paire, il nous reste les trois autres cartes à choisir. Pour cela, le choix de leur hauteur revient à choisir, sous forme de *combinaison*, 3 hauteurs parmi 12 restant disponibles (toutes, sauf celle de la paire), puis, pour chacune des hauteurs choisies, il y a 4 couleurs possibles. Cela fait donc $\binom{12}{3} \times 4^3$ choix possibles, étant donné une paire, pour les trois cartes restantes.

Bilan : le nombre de mains recherché est égal à $13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3$ (c'est-à-dire 1098240).

Le danger du « double-comptage » : il semble que le dénombrement ci-dessus n'oublie aucune possibilité, mais est-on bien sûr de ne pas avoir compté deux fois la même main ? Ceci constitue en effet un écueil majeur en dénombrement.
Ici, on a commencé à *partitionner* l'ensemble des mains recherchées selon la hauteur de la paire qu'elles contiennent, puis le choix de deux couleurs parmi quatre pour les cartes de cette paire. Ainsi, on s'est bien assuré, par exemple, que les mains contenant la paire $10\heartsuit - 10\diamondsuit$ et les mains contenant la paire $V\spadesuit - V\diamondsuit$ étaient bien comptées séparément.
Puis, étant donné chaque paire, on a bien compté une et une seule fois les combinaisons de 3 cartes de hauteurs différentes, choix de couleurs inclus.

2. c'est-à-dire la « valeur » de cette paire : As, roi, dame, valet, 10, 9, 8, …, 2, dans un jeu de 52 cartes.

- **Exemple 2 : nombre d'anagrammes d'un mot contenant des lettres répétées :** *combien existe-t-il d'anagrammes distincts du mot « ANAGRAMME » ?*

Ici, on s'intéresse peu au sens des mots produits.

Il y a une correspondance immédiate entre un mot et un uplet de lettres : le mot « ANAGRAMME » correspond alors au 9-uplet $(A, N, A, G, R, A, M, M, E)$. On pourrait alors croire qu'il suffit de compter le nombre d'arrangements à 9 éléments pris parmi les 9 lettres du mot « ANAGRAMME », mais ceci nous mène sur une mauvaise voie : en effet, si on prend le 9-uplet $(A, N, A, G, R, A, M, M, E)$, on s'aperçoit que permuter les lettres A entre elles ou les lettre M entre elles ne change pas l'identité de l'anagramme produit. Il faut donc procéder autrement.

Comme souvent en dénombrement, il existe plusieurs voies menant au bon résultat. Celle que nous proposons consiste à définir l'emplacement des lettres qui existent en plusieurs exemplaires (A et M), puis, une fois ces emplacements définis, à placer les autres (N,G,R et E).

Ainsi, un anagramme du mot « ANAGRAMME » se constitue :
— d'emplacements pour la lettre A : il suffit pour cela de choisir 3 emplacements parmi 9 disponibles
— d'emplacements pour la lettre M : une fois les lettres A placées, il reste donc 2 emplacements à choisir parmi 6 restants
— d'emplacements pour les autres lettres : une fois les lettres A et M placées, il reste 4 emplacements disponibles, et on compte autant de façons de placer les lettres restantes (N,G,R,E) que de façons de permuter ces quatre lettres, soit $4!$.

Bilan : on compte donc $\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times 4! = \frac{9!}{3!2!}$ anagrammes distincts du mot « ANAGRAMME ».

> **Exercice - Un autre dénombrement ?.** Aboutit-on au même résultat en reprenant la méthode précédente, mais en commençant par placer les M avant les A ? en commençant par placer les lettres uniques (N,G,R,E) avant les M puis les A ?

- **Autres exercices.**

Nous proposons ci-dessous d'autres exercices de mise en situation.

> **Exercice - Encore des mains de poker.** On considère des mains de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Effectuer les dénombrements suivants.
> 1. Nombre de mains contenant exactement 1 as.
> 2. Nombre de mains contenant au moins 2 as.
> 3. Nombre de mains contenant exactement 1 brelan (trois cartes de même hauteur).
> 4. Nombre de mains contenant 1 *full* (1 brelan + 1 paire).

Exercice - Tirages avec remise. On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n avec n un entier fixé ≥ 5. On tire, successivement et avec remise, 5 boules dans l'urne. On note les numéros obtenus en tenant compte de leur ordre d'apparition.

1. Combien y a-t-il de façons de tirer 5 numéros deux-à-deux distincts ?
2. Combien y a-t-il de façons de tirer exactement 3 fois la boule numérotée 1 ?
3. (*) Combien y a-t-il de façons d'effectuer un tirage strictement croissant ?

Exercice - Calcul de coefficient. Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Après simplification et regroupement, quel est le coefficient du terme $x^4y^6z^5$ dans $(x+y+z)^{15}$?
(Tout développement exhaustif est à bannir).

A Réponses et indications pour les exercices

Les éléments proposés dans cette partie ne constituent en aucun cas des solutions intégralement rédigées : l'essentiel de ce qui suit contient des indications ou des réponses brutes sans rédaction et dont le but est d'aider à la résolution des exercices. Le lecteur devra fournir par lui-même le travail de rédaction nécessaire.

- **Exercice 1.**

Il ne manque qu'une seule implication à démontrer : si f s'annule en un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on a $\cos(x_0) = \dfrac{-b}{a}$, ce qui montre que $\dfrac{b}{a} \in [-1; 1]$.

- **Exercice 2.**

Il suffit de formaliser les raisonnements par récurrence. Pour le premier énoncé, la proposition $P(n)$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P(n) =$ « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

Pour le troisième énoncé, il faut raisonner par récurrence « forte ».

Pour le dernier, on dispose de deux façons de procéder, au choix :
— fixer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *puis* procéder par récurrence sur n avec la proposition

$$P(n) : (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

— définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$Q(n) : \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Dans le premier cas, la proposition à démontrer par récurrence dépend de α. Dans le second cas, on intègre le quantificateur universel sur α à la proposition à démontrer par récurrence, qui devient donc indépendante de α. Nous verrons dans l'année que le choix qui nous est offert ici est un confort qui n'est pas toujours accessible.

- **Exercice 3.**

Voici les réponses :
1. il s'agit des fonctions de la forme $f : x \mapsto (x-1)(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
2. on remarque que $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi la condition nécessaire et suffisante à trouver est $n \equiv 1[3]$ ou $n \equiv 2[3]$.
3. dans la phase d'analyse, on remarque qu'il faut que $\sqrt{\dfrac{b}{2}}$ soit rationnel, ce qui impose que $\dfrac{b}{2}$ s'écrive sous la forme $\dfrac{p^2}{q^2}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. Cette dernière condition est suffisante.

- **Exercice 4.**

Voici les réponses :

1. $\forall x \in [1;+\infty[\,, \ln(x) > 0$: c'est FAUX, car pour $x = 1$, on a $\ln(x) = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2)$: c'est FAUX, par exemple pour $x = -2$, on a $x^2 \geq 4$ mais $x < 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| > 2)$: c'est FAUX (le diable se cache dans les détails) et $x = 2$ fournit un bon contre-exemple.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2$: c'est FAUX. Il suffit de prendre $n = 2$, par exemple.
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y \Rightarrow e^x < e^y)$: c'est VRAI.

- **Exercice 5.**

Voici les réponses :

1. en extension : $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$; en compréhension : $\{n \in \mathbb{N}^* : n|24\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq \cos(x)\}$
3. $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\big\}$
4. $\big\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\big\}$
5. $\big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r\big\}$

- **Exercice 6.**

1. pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.
2. Par télescopage, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
3. Pour tout $k \geq 2$, il suffit d'écrire que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$. Grâce à cela, on peut majorer la somme étudiée par 2 (par exemple).

- **Exercice 7.**

Il suffit de suivre les recommandations, en raisonnant par récurrence.

- **Exercice 8.**

Voici les réponses :

1. $S_n = \dfrac{n(n+3)}{2}$
2. $T_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. pour $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ on obtient $U_n = \dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$, et pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on obtient $U_n = n + 1$.
4. $P_n = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ et $I_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$
5. On pourra s'intéresser à la partie imaginaire et à la partie réelle de la somme U_n calculée précédemment.

- **Exercice 9.**

Voici les réponses, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (sachant que pour $n = 0$, la convention choisie pour le symbole $\prod$ fait que tous ces produits valent 1) :

1. 5^n
2. $2^{n(n+1)/2}$
3. $(2^n)^n = 2^{(n^2)}$
4. $n + 1$
5. 0
6. $\dfrac{\sin(2^{n+1}\theta)}{2^n \sin(2\theta)}$

- **Exercice 10.**

1. Le produit est nul.
2. Oui, puisqu'un produit « vide » est, par convention, égal à 1.

- **Exercice 11.**

Voici les réponses :

1. $8 \times 7 \times 6 = 336$
2. On en compte 2 (chaque apparition du facteur 5 crée un zéro, puisqu'on le couple avec l'un des plus nombreux facteurs 2, apparaissant à chaque entier pair du produit).
3. On en compte 24 (attention : les multiples de 25, au nombre de 4, apportent *deux* facteurs 5 au produit total)
4. C'est la fonction $x \mapsto \dfrac{12!}{7!}x^7$.

- **Exercice 12.**

Il faut utiliser les expressions factorielles des coefficients binomiaux.

- **Exercice 13.**

Voici les réponses :

1. 0
2. 495
3. 20
4. 2039190
5. 2380
6. 3432

- **Exercice 14.**

Voici les réponses :

1. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
2. $(a+1)^n$
3. 2^n pour la première, car c'est le développement de $(1+1)^n$, et 0 pour la seconde, car c'est le développement de $(1+(-1))^n$.

- **Exercice 15.**

1. On obtient $\cos^4(x) = \dfrac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})$.
2. On obtient : $\cos^4(x) = \dfrac{1}{8}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)+\dfrac{3}{8}$.
3. De la même manière, on obtient $\sin^5(x) = \dfrac{1}{16}\sin(5x)-\dfrac{5}{16}\sin(3x)+\dfrac{5}{8}\sin(x)$.

- **Exercice 16.**

Voici les réponses :

1. $\mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
4. $\mathbb{R}$
5. $]1;+\infty[$: la racine carrée doit être bien définie et ne pas s'annuler.
6. $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$: le cosinus ne doit pas s'annuler.
7. $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ après un tableau de signe pour l'expression $\dfrac{x+1}{x-1}$.

- **Exercice 17.**

Voici les réponses :

1. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$; fonction dérivée : $x\mapsto 3x^2+1$
2. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$; fonction dérivée : $x\mapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$
3. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$; fonction dérivée : $x\mapsto e^{x+1}$
4. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$; fonction dérivée : $x\mapsto \cos(x)-3\cos(x)\sin^2(x)$

5. la détermination du domaine de dérivabilité demande l'étude du signe sur $\mathbb{R}$ du polynôme X^3-2X+1. Ce polynôme possède une racine évidente (1) et se factorise donc ainsi :
$$X^3-2X+1=(X-1)(X^2+X-1)=(X-1)(X-r_1)(X-r_2)$$
où $r_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ sont les racines du trinôme X^2+X-1. On note que $r_2<r_1<1$, ce qui nous permet de faire un tableau de signe de l'expression X^3-2X+1 sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que pour $x\in\mathbb{R}$, $x^3-2x+1>0$ si et seulement si $x\in\,]r_2;r_1[\cup]1;+\infty[$.
Puis, la fonction dérivée est alors donnée par $x\mapsto\dfrac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+1}}$.
6. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ (le cosinus ne doit pas s'annuler).
La dérivée de la fonction tangente possède deux formes égales, chacune d'entre elles étant utile dans son contexte. Cette fonction dérivée est $x\mapsto 1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
7. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$, car les deux trinômes en jeu sont sans racine réelle et strictement positifs sur $\mathbb{R}$.
Fonction dérivée : Le plus habile est peut-être de réécrire la fonction sous la forme suivante :
$$x\mapsto\sqrt{1+\frac{2x}{x^2-x+1}}$$
Alors la fonction dérivée prend la forme suivante :
$$x\mapsto\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$$
8. domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$, car c'est celui de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$. Par ailleurs, la fonction $x\mapsto 1+e^{\sqrt{x}}$ est strictement positive pour tout $x>0$. Par composition, la fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Fonction dérivée : la dérivée de $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, la fonction dérivée recherchée est :
$$x\mapsto\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+e^{\sqrt{x}})}$$

- **Exercice 18.**

1. On évalue la quantité $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x\to 0^+$ et on voit que cette quantité tend vers $+\infty$ pour $x\to 0^+$.
2. Il est conseillé de raisonner par analyse synthèse. Pour la phase d'analyse, on fixe $\alpha>0$ de telle manière que la fonction $x\mapsto x^\alpha$ soit dérivable en 0.
Cela signifie que le taux d'accroissement $x\mapsto\dfrac{x^\alpha-0}{x-0}=x^{\alpha-1}$ admet une limite finie

en 0. On voit alors que cela impose $\alpha \geq 1$.
Pour la phase de synthèse, on suppose $\alpha \geq 1$: alors $x^{\alpha-1}$ tend vers une limite finie (1 si $\alpha = 1$, 0 si $\alpha > 1$) lorsque $x \to 0^+$.
Conclusion : la condition nécessaire et suffisante recherchée est $\alpha \geq 1$.

- **Exercice 19.**

Dans cet exercice, ce sont des identités remarquables propres aux fonctions en jeu qui permettent de faire avancer les calculs. Nous en donnons l'idée sans finaliser le raisonnement.

1. pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$: $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$
2. pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x > 0$ avec $x \neq a$: $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ selon la technique de la « quantité conjuguée »,
3. pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$: $\dfrac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \dfrac{\sin(x - a + a) - \sin(a)}{x - a}$ puis :
$$\frac{\sin(x - a + a) - \sin(a)}{x - a} = \frac{\sin(x - a)\cos(a)}{x - a} + \frac{(\cos(x - a) - 1)\sin(a)}{x - a}$$
il suffit alors d'utiliser les deux limites fournies.

4. pour $a \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ et $n \in \mathbb{N}$: on utilise la formule de Bernoulli proposée précédemment dans le document, permettant de factoriser $a^n - b^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors :
$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}$$
On voit alors que pour $x \to a$, la quantité tend vers $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}$.

- **Exercice 20.**

Il suffit de considérer une primitive F de f : les propriétés de f sont donc les propriétés de la dérivée de F.

- **Exercice 21.**

Nous nous contentons ici de donner des primitives correspondant aux fonctions à intégrer.

1. $t \mapsto \dfrac{1}{4}t^4$
2. $t \mapsto 2\sqrt{t}$
3. $t \mapsto -\dfrac{2}{3t^3}$
4. $t \mapsto \dfrac{-1}{3}\cos(3t)$
5. $t \mapsto \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{4}\sin(2t)$
6. $t \mapsto -\ln(\cos(t))$
7. $t \mapsto -2 \cdot e^{-t/2}$
8. $t \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$
9. $t \mapsto \ln(\ln(t))$

Pour la cinquième intégrale, l'idée était de linéariser $\sin^2(t)$ en utilisant la formule de trigonométrie $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

- **Exercice 22.**

Voici les réponses :

1. $\frac{1}{4}(1+3e^4)$
2. $\frac{4-\pi}{2\sqrt{2}}$
3. 0
4. $\frac{1}{4}(1+e^2)$
5. $\frac{1}{16}(\pi^2-4)$
6. $\frac{1}{2}(1+e^{\pi/2})$

A propos de la troisième intégrale : en intégrant une fonction *impaire* sur un intervalle symétrique par rapport à 0, on trouve nécessairement 0.

- **Exercice 23.**

Voici les réponses, avec l'intégrale transformée après changement de variable.

1. $\int_1^7 \frac{1}{3}u^5 \cdot du = \frac{7^6-1}{18} = 6536$
2. $\int_1^{15/16} \frac{-du}{2\sqrt{u}} = 1 - \frac{\sqrt{15}}{4}$
3. $\int_1^2 \frac{du}{u^3} = \frac{3}{8}$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^2(u)du = \frac{\pi}{4}$
5. $\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1-u^2}{u^4}du = \frac{1}{27}(10\sqrt{3}-9\sqrt{2})$

Pour la troisième intégrale, on pourra tracer la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[0;1]$: l'intégrale correspond alors à l'aire délimitée par un quart de cercle de rayon 1.

- **Exercice 24.**

Voici les réponses :

1. Il y a 22 entiers naturels compris au sens large entre 1589 et 1610. Le règne du roi Henri IV a débuté le 2 août 1589 et s'est terminé le 14 mai 1610. Cela fait donc un règne de 20 années pleines (en tant que roi de France).
2. il y en a $2n+1$ (ne pas oublier de compter 0)
3. cela dépend de la parité de n lui-même. Si n est impair, on en compte $2\cdot\frac{n-1}{2}+1 = n$. Si n est pair, on en compte $2 \cdot \frac{n}{2} + 1 = n+1$.
4. 1610 est un multiple de 7. Notre dénombrement revient donc à compter le nombre de multiples de 7 compris au sens large entre 0 et $2020-1610 = 410$. On en compte donc $\left\lfloor \frac{410}{7} \right\rfloor + 1$, c'est-à-dire 59.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la notation $\lfloor x \rfloor$ s'appelle *partie entière* du réel x : c'est l'entier relatif immédiatement inférieur ou égal à x.

- **Exercice 25.**

Voici les réponses :

1. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
2. c'est l'ensemble constitué des ensembles suivants :
   — l'ensemble vide :$\emptyset$
   — les singletons : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
   — les paires : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$
   — les parties à 3 éléments : $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
   — les parties à 4 éléments : $\{1, 2, 3, 4\}$
3. $\{\emptyset, \{10\}, \{24\}, \{10, 24\}\}$
4. la réponse est $\{\emptyset\}$: cet ensemble est non-vide, c'est un singleton contenant l'élément appelé « ensemble vide ». Ainsi, l'ensemble des parties de l'ensemble vide est ... non vide.
5. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
6. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

- **Exercice 26.**

Voici les réponses :

1. si $b < c$, la réunion concerne deux ensembles disjoints et leurs cardinaux s'additionnent. Le cardinal recherché est donc $(b - a + 1) + (d - c + 1)$.
2. si $b \leq c$, les deux ensembles possèdent un élément en commun. Le cardinal recherché est donc $(b - a + 1) + (d - c + 1) - 1$
3. si $b \geq c$, il faut appliquer la formule du crible de Poincaré et on trouve :

$$(b - a + 1) + (d - c + 1) - (c - b + 1) = 2b - 2c + d - a + 1$$

- **Exercice 27.**

Oui, elle convient tout à fait, puisque l'ensemble des parties de l'ensemble vide est un singleton (cf. exercice 25), donc contient bien $2^0 = 1$ élément.

- **Exercice 28.**

1. D'après la formule précédente, on a $C = \binom{5}{3} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$
2. A chaque partie comptant 2 éléments pris parmi $\{1, 2, 3, 4\}$ correspond une et une seule partie à 3 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ contenant l'élément 5, et réciproquement. Par ailleurs, $C_1 = 6$ (cf. exercice 25 pour une liste exhaustive de ces parties).

3. Une partie à 3 éléments de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ ne contenant pas l'élément 5 est exactement une partie à 3 éléments de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$, par conséquent, celles-ci sont bien en même nombre.
   Par ailleurs, $C_2 = 4$ (cf. exercice 25 pour une liste exhaustive de ces parties).
4. On peut effectuer une *partition* de l'ensemble des parties à 3 éléments de $\{1,2,3,4,5\}$ en deux catégories distinctes :
   — celles contenant l'élément 5, au nombre de C_1
   — celles ne contenant pas l'élément 5, au nombre de C_2.
   Il est donc logique de trouver $C = C_1 + C_2$.

5. On procède par récurrence sur le cardinal de E (formaliser la proposition à démontrer est un très bon exercice). Pour la phase d'hérédité, on particularise un élément x de E et on s'appuie sur le fait que les parties à p éléments de E se « partitionnent » entre celles qui contiennent x et celles qui ne contiennent pas x.

N.B. : une *partition* d'un ensemble E en n sous-ensembles (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ de parties de E, deux-à-deux disjointes, dont la réunion est égale à E. En quelque sorte, c'est un « puzzle » de l'ensemble E.

- **Exercice 29.**

Voici des éléments de réponse.

1. Le jeu de 52 cartes doit être considéré comme un ensemble de cardinal 52 dont on compte ici les parties à 5 éléments. Résultat : $\dbinom{52}{5}$.
2. Cette fois, cela revient à dénombrer le nombre de parties à 5 éléments dans un ensemble en contenant 48, puisqu'on enlève les 4 valets du jeu. Résultat : $\dbinom{48}{5}$.
3. Le nombre de combinaisons possibles est de $\dbinom{n}{5}$.

- **Exercice 30.**

Voici des éléments de réponse.

1. Un mot est en fait un triplet de lettres (l'ordre des lettres importe, bien sûr) dans lequel peuvent figurer des répétitions. On en compte donc $3^5 = 243$.
2. Un nombre < 100 à 2 décimales est composé de 4 chiffres. Lui correspond donc un quadruplet de chiffres compris entre 0 et 9. On en compte alors $10^4 = 10000$.
3. Nous sommes ici en train de compter le nombre de quadruplets (a, b, c, d) de telle manière que le nombre décimal ab, cd soit inférieur ou égal à 95 et ne contienne pas le chiffre 5. On distingue plusieurs cas :
   — si $a = 9$: alors b est compris entre 0 et 4, c et d, entre 0 et 9 en évitant le 5. Cela fait donc $5 \times 9 \times 9 = 405$ possibilités
   — pour chaque valeur de a entre 0 et 8 en évitant le 5 : on compte 8 possibilités pour chacun des chiffres b, c, d. Bilan : $8^3 = 2^9 = 512$ possibilités.
   Au total, cela nous fait donc un dénombrement de $405 + 8 \times 512 = 4501$ nombres possibles.

4. Ici, cela nous fait n^5 possibilités, puisque l'ordre d'apparition des boules importe. On se retrouve donc à dénombrer le nombre de 5-uplets à valeurs dans $[\![1;n]\!]$ (les répétitions sont possibles).

- **Exercice 31.**

1. Un anagramme est une permutation des 9 lettres distinctes du mot « ABSURDITE ». On en compte donc $9!$ c'est-à-dire 362880.
2. A la différence de l'exercice précédent, on ne remet pas les boules dans l'urne à chaque tirage d'une boule. Ainsi, on compte le nombre d'arrangements à 5 éléments pris parmi n (l'ordre d'apparition des numéros importe). On compte ainsi $\dfrac{n!}{(n-5)!}$ arrangements possibles.

- **Exercice 32.**

1. $C_3 = \dbinom{6}{3} = 20$ et $A_3 = 120$.
2. On en compte $3! = 6$.
3. Pour chaque combinaison (partie à 3 éléments de E, du type de F), on compte $3!$ arrangements possibles. C'est ainsi qu'on explique qu'il y a $3! = 6$ fois plus d'arrangements à 3 éléments que de combinaisons à 3 éléments.
4. On fixe $p \in [\![0;n]\!]$ et une combinaison G à p éléments de E. On compte $p!$ permutations de G. Ainsi, on compte $p!$ arrangements correspondant à une combinaison donnée.
   On retrouve ainsi la relation multiplicative suivante : $\dfrac{n!}{(n-p)!} = p! \cdot \dbinom{n}{p}$, relation qu'on vérifie par le calcul.

- **Exercice 33.**

1. En commençant par placer les M, on trouve :
$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times 4! = \frac{9!7!4!}{7!2!4!3!} = \frac{9!}{2!3!}$$
   soit le même résultat.
2. En commençant par placer les lettres uniques, puis par exemple les A puis les M, on trouve :
$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3!2!}$$
   et on retrouve $\dfrac{9!}{3!2!}$.

- **Exercice 34.**

Voici des éléments de réponse.

1. On a 4 as possibles, puis 4 cartes à choisir parmi 48 (52 moins 4). Résultat : $4 \times \binom{48}{4}$.
2. On dénombre les cas contraires : les mains sans As sont au nombre de $\binom{48}{5}$ et les mains avec exactement 1 as ont été dénombrées précédemment. Le nombre total de mains est de $\binom{52}{5}$.
   Résultat : $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} - 4\binom{48}{4}$.
3. On choisit la hauteur du brelan : 13 hauteurs possibles. Puis, s'effectue un choix de trois couleurs pour les cartes du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ possibilités. Puis, restent les hauteurs des deux autres cartes, qui doivent être différentes de celle du brelan : $\binom{12}{2}$ choix possibles. Enfin, pour la couleur de ces cartes : 4×4 possibilités.
   Résultat : $13 \times 4 \times \binom{12}{2} \times 16 = 54912$.
4. On choisit la hauteur du brelan : 13 possibilités, puis les couleurs du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ possibilités. Puis, il y a la paire : 12 hauteurs possibles et $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour les couleurs de cette paire.
   Résultat : $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$ *full* possibles.

- **Exercice 35.**

Voici des éléments de réponse. Un tirage de 5 boules est un 5-uplet d'entiers compris entre 1 et n (il est ici tenu compte de l'ordre d'apparition des numéros).

1. On compte n possibilités pour la première composante, puis pour chacune d'entre elles, $(n-1)$ pour la seconde composante, etc. Finalement, il y a $\dfrac{n!}{(n-5)!}$ possibilités.
2. Il s'agit de choisir les positions des 1 dans le tirage : $\binom{5}{3}$. Puis, il reste $(n-1)^2$ possibilités pour les 2 autres boules. Résultat : $\binom{5}{3} \times (n-1)^2$.
3. Il suffit de se persuader du fait suivant : un tirage strictement croissant correspond exactement à la donnée d'une partie à 5 éléments pris parmi n. En effet, chaque tirage strictement croissant correspond à la donnée de 5 entiers pris parmi n et réciproquement. Le nombre de tirages strictement croissants est donc de $\binom{n}{5}$.

- **Exercice 36.**

Il faut voir le produit $(x+y+z)^{15}$ sous la forme suivante :

$$(x+y+z)^{15} = (x+y+z) \times (x+y+z) \times \cdots \times (x+y+z)$$

Pour composer $x^4y^6z^5$, il faut prendre x dans 4 parenthèses, y dans 6 parenthèses et z dans les 5 restantes.

Il y a $\binom{15}{4}$ façons de choisir les parenthèses pour x, puis $\binom{11}{6}$ façons de choisir celles pour y. Une fois celles-ci fixées, il n'y a plus de choix à faire : il faut prendre z dans les parenthèses restantes.

Le résultat est donc de $\binom{15}{4} \times \binom{11}{6} = \dfrac{15!}{4!6!5!}$.

Remarque : le résultat ressemble à un dénombrement d'anagrammes. Pourquoi ?