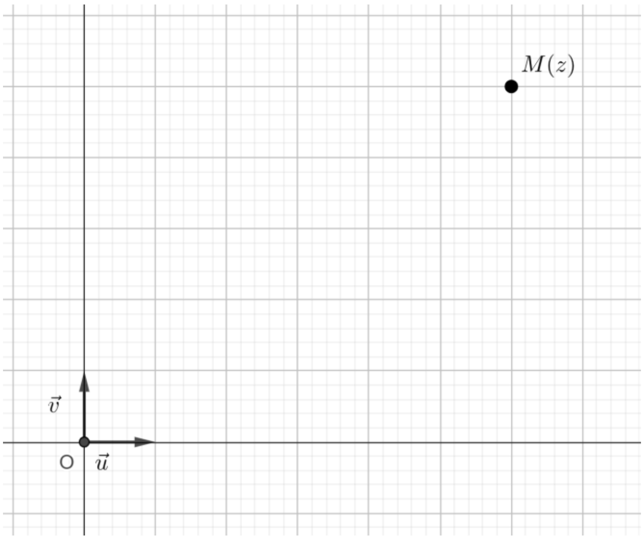
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

I Géométrie et nombres complexes

1.1 Représentation géométrique

Définitions



Remarques
1) Lorsqu'un point ou un vecteur est repéré par son affixe, le plan est appelé le plan complexe.
2) Les nombres réels sont représentés sur l'axe des abscisses, appelé aussi axe des réels. Les nombres imaginaires purs sont représentés sur l'axe des ordonnées, appelé aussi axe des imaginaires (purs).
3) Deux points sont confondus ssi ils ont la même affixe et deux vecteurs sont égaux ssi ils ont la même affixe.

Exemple

Histoire des mathématiques Le mot « affixe » un mot féminin qui provient du latin *affigere* et signifie *attacher à*. Ce mot apparaît en mathématiques en 1885.

Notations
1) L'affixe d'un point M est souvent noté z_M et la donnée d'un point M d'affixe z_M est souvent notée $M(z_M)$.
2) L'affixe d'un vecteur $\vec{w}$ est souvent noté $z_{\vec{w}}$ et la donnée d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}$ est souvent notée $\vec{w}\,(z_{\vec{w}})$.

Propriétés

Démonstrations en exercice

Exemples

Remarque
Ces propriétés sont importantes car elles permettent de traiter des problèmes géométriques dans le plan complexe, c'est-à-dire dans le champ complexe, ce qui permet des calculs plus simples que ceux qui sont réalisés dans le plan usuel avec les coordonnées d'un point ou d'un vecteur. En effet, prenons les trois points suivants :

Exercice 1
Dans le plan complexe, on a placé les points suivants $A(-1+2i), B(-1-i)$ et $C(3-2i)$. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD est un parallélogramme, puis l'affixe du centre du parallélogramme.

Propriété

Démonstration en exercice

1.2 Module d'un nombre complexe

Définition

Exemple

Remarques

Propriétés

Démonstrations

Exemples

Propriétés *Opérations sur les modules*

Démonstrations

Exemples

Exercice 2

On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{2024}}{1-i}, \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

Déterminer le module de z.

Propriétés *Ensemble des nombres complexes de module 1*

Démonstrations en exercice

Remarques

Exercice 3

Soit z_1 , z_2 et z_3 appartenant à $\mathbb{U}$ tels que $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Démontrer que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$.

Propriété *Distance et module*

Démonstration en exercice

Exemple

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3 + 4i| = 2$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 + i| = |z + 4 - 2i|$.

Dans la suite du chapitre, on supposera que le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ est ***orienté dans le sens trigonométrique.***

1.3 <u>Argument d'un nombre complexe (non nul)</u>

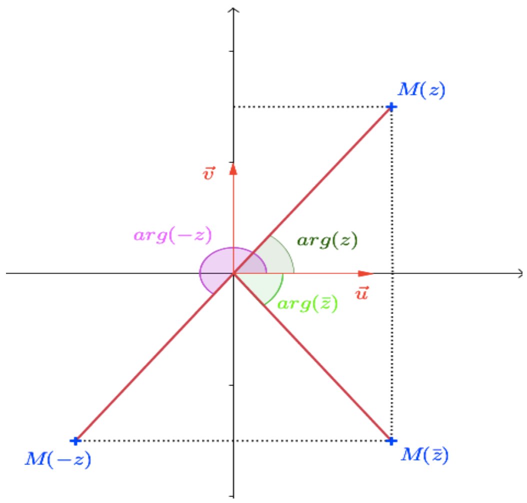
Définition

Remarques

Exemples

Propriétés

Démonstrations
(i) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
(ii) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
(iii) et (iv) Ces résultats se déduisent par symétrie.



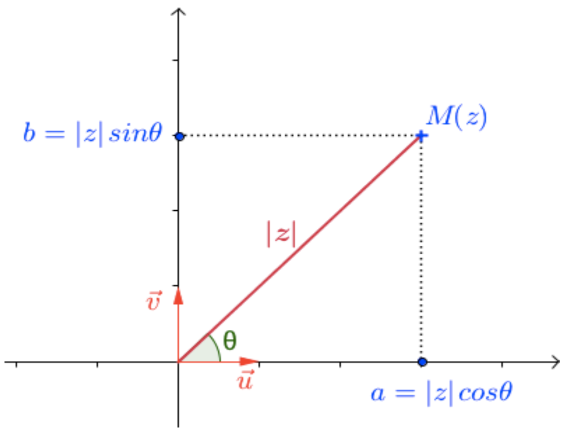
Exemples

II <u>Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe</u>

2.1 <u>Forme trigonométrique d'un nombre complexe</u>

Propriété

Démonstration



Définition

Remarques

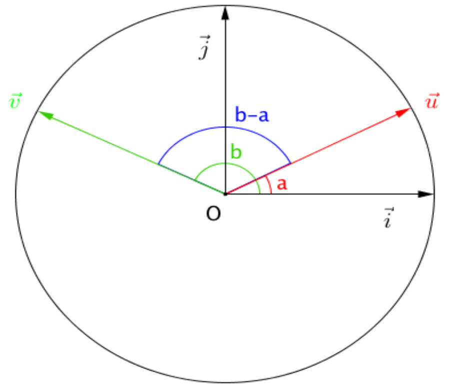
Exemples

Propriété

Démonstration en exercice

Propriétés *Formules d'addition*

Démonstrations



Exemples

Propriétés *Formules de duplication*

Démonstrations

Utiliser les formules précédentes en prenant $b = a$ et utiliser pour (i) $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

Exemples

Propriétés

Démonstrations

Exemple

Propriété *Formule de Moivre* *(Mathématicien français, 1667-1754)*

Démonstration

Remarque

Exemples

Exercice 5 *Lignes trigonométriques de* $\frac{\pi}{8}$

On pose $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique de z^2.
2. En déduires les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ appelées *lignes trigonométriques de* $\frac{\pi}{8}$.

2.2 <u>Forme exponentielle d'un nombre complexe</u>

Préliminaire

Posons $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

On a d'après les formules d'addition : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$.

Soit : $f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta')$. Par ailleurs, $f(0) = 1$.

La fonction f transforme une addition de deux nombres réels en une multiplication de deux nombres complexes
Par analogie avec la fonction exponentielle exp : $\theta \longmapsto e^{\theta}$ qui possède la même propriété algébrique ($e^{\theta} e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$), on donne la définition qui suit (dite de *l'exponentielle complexe*) :

Définition

Exemples

Histoire des mathématiques

L'identité : $e^{i\pi} + 1 = 0$ a été établie par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 – 1783). Elle est considérée comme la plus belle identité des mathématiques ; puisqu'elle fait ressortir cinq constantes importantes : $\pi, e, i, 1$ et 0. Euler est le scientifique qui a le plus écrit, et sur des sujets très divers ; ses œuvres complètes comprennent plus de 800 travaux, occupent près de 100 volumes. Il a fortement influencé le cours des mathématiques, dans toutes les branches de l'analyse et de l'algèbre, en mécanique, en musique, ect. Il est le 1er à reprendre les travaux de Fermat en théorie des nombres.

Posons $\varsigma(s) = \sum_{n>0} \frac{1}{n^s}$. Euler montre que $\varsigma(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Son œuvre majeur l'*Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) est un livre de près de 800 pages. La grande innovation est de tout baser sur la notion de fonction : *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*
C'est Euler qui impose la notation *e*.

Propriété - Définition

Remarque

Maintenant, vous savez que tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous trois formes :

- sa **forme algébrique**
- sa **forme trigonométrique**
- sa **forme exponentielle**

Exemples
Écrivons les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :
1) $z_1 = -2i$ **2)** $z_2 = -3$ **3)** $z_3 = \sqrt{3} - 3i$.

Propriétés Pour tous nombres réels θ, θ' :

Démonstrations en exercice

Exemples

Propriété *Formules d'Euler*

Démonstration

Remarque
Les formules d'Euler permettent de redémontrer les formules de trigonométrie déjà connues comme celles d'addition ou de duplication et d'en justifier de nouvelles (cf exemple 2) et exercice 5)

Exemples

Exercice 6
Soit θ un réel et n un entier naturel. Calculer la valeur des sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \ \ et\ A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Indication : Calculer la somme $C_n = A_n + iB_n$

III Applications géométriques

3.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition et propriété *Racine* n*-ième de l'unité*

Démonstration

Remarques

Exemples

Propriété

Démonstration

Propriété

Exemples

3.2 Interprétations géométriques

Propriétés

Démonstrations

(i) On considère un point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$. Alors E a pour affixe $e = b - a$. Donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}) = \arg(b-a)$ et donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(b-a)$.

(ii) $\frac{AC}{AB} = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$.

(iii) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC})$

$= (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$

$= \arg(c-a) - \arg(b-a)$

$= \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$.

Exercice 7

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.