Ce recueil est une sélection d'exercices couvrant une large partie des enseignements de seconde et qui permet donc de faire le point sur ses connaissances.

<u>**Exercice 1**</u> *Pour s'échauffer…*

1. Soit a, b et c des nombres réels. Montrer que : $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.
2. Soit a et b deux réels positifs. Comparer $\frac{a+b}{2}$ (*moyenne arithmétique*) et $\sqrt{ab}$ (*moyenne géométrique*).
3. Soit a, b deux réels de $[0\,;1]$. Démontrer que $\frac{a+b}{1+ab}\in[0\,;1]$.
4. Soit a et b des réels non nuls. Démontrer que : $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+3>2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.
5. On considère x un réel supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
   Soit $A(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$.
   Déterminer x tel que : **a.** $A(x)=\sqrt{2}$ **b.** $A(x)=1$ **c.** $A(x)=2$.
6. Résoudre les équations suivantes :
$$|x-4|+|6-3x|=6$$
$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$$
7. Résoudre l'inéquations suivante :
$$\frac{1}{x-n}\geq x-n\ ;n\in\mathbb{N}$$

<u>**Exercice 2**</u> *A condition que…*

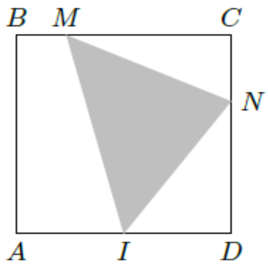
1. Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ de nombres vérifiant $\frac{x^2-y^2}{x+y}=0$ et $(y-4)(x-3)=12$.
2. a, b, c et d désignent quatre nombres vérifiant $(a^2+d^2)(b-c)=0, ad=18$ et $abcd=162$. Que vaut la somme $(a+b+c+d)$?
3. Soit $x, y\,, z$ trois nombres tels que $x^2=y^2=z^2$. Que vaut $(x-y)(y-z)(z-x)$?
4. Soit a et b des réels tels que $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}=1$. Démontrer que $a^3+b^3=a+b$.
5. Soit a, b et c trois nombres réels non nuls tels que $ab+ac+bc=0$.
   Démontrer que : $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=-3$.

<u>**Exercice 3**</u> *Tout en puissance…*

1. Soit n un entier naturel et A, B, C trois nombres définis par :

$A=\frac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}$; $B=1^n+5^n+9^n+17^n+18^n$; $C=2^n+3^n+11^n+15^n+19^n$.
   - **a.** Calculer A, B et C pour $n=0, n=1, n=2$ et $n=3$.
   - **b.** Emettre une conjecture.
   - **c.** Prouver ou réfuter vos deux conjectures
2. Dans chacun des cas, déterminer la valeur de n telle que :
   - **a.** $\left(\frac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\right)\left(\frac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}\right)=2^n$
   - **b.** $3^{2001}+3^{2002}+3^{2003}=n3^{2001}$
   - **c.** $(10^{2002}+25)^2-(10^{2002}-25)^2=10^n$

Exercice 4



$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. I est le milieu de $[AD]$.
M est un point de $[BC]$ et N un point de $[CD]$ tels que $BM = CN = x$.
Exprimer l'aire du triangle IMN en fonction de x.

Exercice 5

Soit x la largeur d'un rectangle. Elle est égale à sa longueur moins 7.

1. Exprime le périmètre de ce rectangle en fonction de x.
2. Exprime l'aire de ce rectangle en fonction de x.
3. Calcule son périmètre et son aire si $x = 13$cm.

Exercice 6

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle dont les mesures des côtés sont 4,5 et 7.

Exercice 7

ABC est un triangle isocèle en A et de périmètre 16 cm. De plus, son aire est égale au quart de l'aire du carré construit sur sa base [BC].
Quelles sont les longueurs des côtés de ce triangle ?

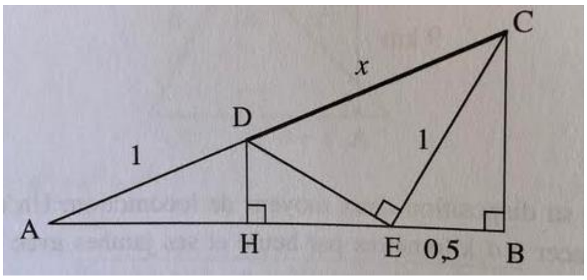
Exercice 8

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ du plan, on donne les points $S(2; 2)$, $E(3; 4)$, $F(1; 5)$ et $T\left(\frac{1}{2}; \frac{7-\sqrt{6}}{2}\right)$.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Démontrer que le triangle SEF est rectangle et isocèle en E.
3. Calculer les coordonnées du milieu Ω de $[SF]$.
4. Déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[SF]$.
5. Démontrer que T appartient au cercle $\mathscr{C}$. Que peut-on en déduire pour le triangle FTS ?

Exercice 9

Le but de l'exercice est de calculer la distance DC dans la configuration ci-dessous où ABC et EBC sont deux triangles rectangles en E ; les points A, D et C sont alignés ; AD=1, EB=0,5 et EC=1.



On pose $DC = x$ et on note H le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).

1. Montrer que $DH = \frac{\sqrt{3}}{2(x+1)}$.

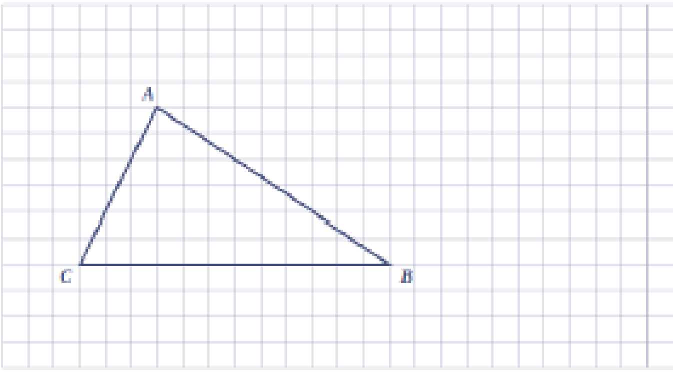
2. Montrer que les angles $\widehat{HDE}$ et $\widehat{CEB}$ ont la même mesure.

3. En déduire que $DE = \frac{\sqrt{3}}{x+1}$.
4. Montrer que $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$.
5. En déduire que x est une solution de l'équation $x^3 = 2$.
6. Déterminer une valeur approchée de x comportant trois décimales exactes.

Exercice 10

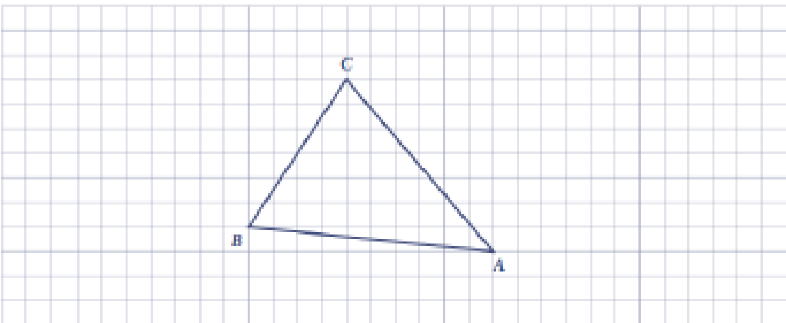
Le plan est muni d'un repère orthonormé (*unités graphiques 1 cm sur chaque axe*)

1. Dans le repère ci-dessous, placer les points $A(-4;-3)$, $B(-1;3)$ et $C(3;1)$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis, placer D sur la figure.
3. Calculer les coordonnées du centre I du parallélogramme $ABCD$.
4. Soit M le point défini par
$$6\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{CB}$$
   a) Démontrer que $\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   b) Construire le point M sur la figure (*on laissera apparents les traits de construction*).
   c) Calculer les coordonnées de M.
5. Les points D, I et M sont-ils alignés ? Justifier la réponse.



Exercice 11

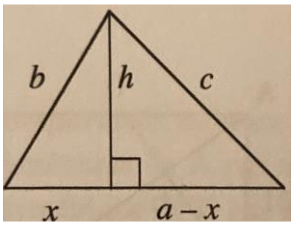
ABC est un triangle.



1. Sur le dessin ci-dessus, placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
2. I est le point tel que $2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. Montrer que I est le milieu du segment $[AC]$.
3. Les points M, I et N sont-ils alignés ?

Exercice 12 *La formule de Héron*

Le but de l'exercice est de démontrer la formule de Héron[1], permettant de calculer l'aire S d'un triangle connaissant les mesures a, b et c des longueurs de ses trois côtés, dans le cas de la configuration ci-dessous.



1. Montrer que $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$.

2. En déduire que $h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}$.

3. On note p le demi-périmètre du triangle. Démontrer la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercice 13

Trouver toutes les fonctions affines (du type $f(x) = ax + b$) telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\big) = f(x).$$

Exercice 14

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x| - x - 2$.

1. Calculer les images par f des réels 0, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ et $\sqrt{2} - 2$.

2. Déterminer les antécédents de -2 et 0 par la fonction f.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(i) $f(x) = -x$.

(ii) $f(x) = x$.

---

[1] On sait peu de choses sur la vie de Héron d'Alexandrie (né vers la fin du I siècle av-JC). Sans doute égyptien. Il est pénétré de culture grecque et babylonienne, et son savoir est encyclopédique. Il écrit de nombreux traités ; quatorze nous sont parvenus, dont *Pneumatica, Catoptrica et Geometrica.* Héron est aussi un inventeur talentueux ; il conçoit d'innombrables machines mues par des mouvements de fluides, qu'il décrit dans *Pneumatica*. Il fabrique également un ancêtre du thermomètre. Dans *Catoptrica*, il énonce le principe de réflexion de la lumière, qu'il justifie par le principe aristotélicien selon lequel la nature choisit le chemin le plus court. Les travaux mathématiques de Héron concernent avant tout la géométrie et ses applications pratiques. C'est seulement en 1896 que l'on découvre *Geometrica* à Constantinople. Cet ouvrage en 3 volumes traite de la mesure des aires des triangles, des carrés et des volumes de cônes, de cylindres et des sphères, avec des applications à la recherche de volumes des théâtres ou des thermes. On y trouve aussi la méthode de recherche de la racine carrée d'un nombre donné. Contrairement à de nombreux mathématiciens grecs, Héron privilégie les méthodes pratiques de calcul, avec peu de démonstrations et beaucoup d'exemples. Ne faisant pas de distinction entre une valeur approchée et une valeur exacte, il donne $\frac{13}{30}a^2$, au lieu de $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, comme aire d'un triangle équilatéral de côté a. On peut y voir l'influence babylonienne, mais plus probablement la marque d'une époque qui avait peu d'intérêt pour la spéculation. La formule d'Héron était déjà connue d'Archimède, il en donne une démonstration et son nom lui est donné par les mathématiciens arabes.

Corrigé des exercices

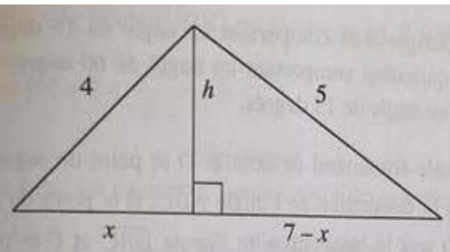
Exercice 2

1. $(0\,;0)$ et $(7\,;7)$.
2. On a deux possibilités :
   $*(a^2+d^2)=0$ soit a=0 ce qui contredit ad=18.
   $*(b-c)=0$ soit $b=c$
   Nécessairement on a $b^2=a$, ad=18 et $adb^2=168$ et $a=9$ soit $b=-3$ et $b=3$.
   Si $b=3, a+b+c+d=17$
   Si $b=-3, a+b+c+d=5$.
3. $(\quad)(\quad)(\quad)=xyz-xz^2-y^2z+yz^2-x^2y+x^2z+xy^2-xyz=x(y^2-z^2)+(x^2-y^2)z+y(z^2-x^2)=0$

Exercice 3

$$A=\frac{\left(8^n(8+1)\right)^2}{\left(4^n\left(1-\frac{1}{4}\right)\right)^2}=192.$$

Exercice 6



Calcul de x

En appliquant deux fois le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles de la figure ci-dessus on obtient

$$x^2+h^2=4^2 \text{ et } (7-x)^2+h^2=5^2.$$

On en déduit que $h^2=16-x^2$ et $h^2=25-(7-x)^2$ puis que

$$16-x^2=25-(7-x)^2.$$

$16-x^2=25-(7-x)^2 \Leftrightarrow 16-x^2=25-49+14x-x^2 \Leftrightarrow 40=14x.$

On obtient $x=\dfrac{20}{7}$.

Calcul de h

$$h^2=16-\left(\frac{20}{7}\right)^2=16-\frac{400}{49}=\frac{784-400}{49}=\frac{384}{49} \text{ donc } h=\frac{\sqrt{384}}{7}=\frac{8\sqrt{6}}{7}.$$

Calcul de $\mathcal{A}$

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle dont les mesures des côtés sont 4, 5 et 7 est égale à

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\times 7\times\frac{8\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}.$$

Exercice 9

1. Montrer que $DH = \dfrac{\sqrt{3}}{2(x+1)}$.

Les droites (DH) et (CB), perpendiculaires à la droite (AB), sont parallèles. On a alors $\dfrac{DH}{CB} = \dfrac{1}{1+x}$ d'après le théorème de Thalès.

Dans le triangle ECB rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ donc $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que $DH = \dfrac{\sqrt{3}}{2(x+1)}$.

2. Montrer que les angles $\widehat{HDE}$ et $\widehat{CEB}$ ont la même mesure.

Dans le triangle HDE rectangle en H, $\widehat{HDE} + \widehat{DEH} = 90°$. L'angle $\widehat{HEB}$ est plat et $\widehat{DEC} = 90°$ donc $\widehat{HED} + \widehat{CEB} = 90°$. On en déduit que les angles $\widehat{HDE}$ et $\widehat{CEB}$ ont la même mesure.

3. En déduire que $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{x+1}$.

$\widehat{HDE} = \widehat{CEB}$ donc $\cos \widehat{HDE} = \cos \widehat{CEB}$ donc $\dfrac{DH}{DE} = \dfrac{EB}{EC} = 0{,}5$.

On en déduit que $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{2(x+1)} \times 2$ donc $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{x+1}$.

Autre méthode : la question précédente permet d'affirmer que les triangle DHE et EBC ont deux angles de même mesure. Ils sont donc semblables do $\dfrac{DH}{EB} = \dfrac{DE}{EC}$ donc $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{2(x+1)} \times 2$ donc $DE = \dfrac{\sqrt{3}}{x+1}$.

4. Montrer que $x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$.

Dans le triangle DEC rectangle en E,

$$1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{x+1}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{(x+1)^2} = x^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 3 = x^2(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = x^4 + 2x^3 + x^2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0.$$

5. En déduire que x est une solution de l'équation $x^3 = 2$.

$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3(x+2) - 2(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^3 - 2) = 0$.

x étant différent de -2, x est solution de l'équation $x^3 = 2$.

6. Déterminer une valeur approchée de x comportant trois décimales exactes.

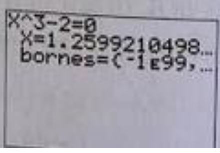
En calculant quelques valeurs de x^3 bien choisies on obtient

x	x^3
1,2	1,728
1,3	2,197

x	x^3
1,25	1,953125
1,26	2,000376

x	x^3
1,259	1,995616979
1,26	2,000376

On en déduit que $1{,}259 < x < 1{,}26$ donc $x \approx 1{,}259$. On peut aussi utiliser le solver d'une calculatrice et obtenir une plus grande précision.



Exercice 12

En appliquant deux fois le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles de la figure ci-dessus on obtient

$$x^2 + h^2 = b^2 \text{ et } (a-x)^2 + h^2 = c^2 \text{ soit } h^2 = b^2 - x^2 \text{ et } h^2 = c^2 - (a-x)^2.$$

On en déduit que $b^2 - x^2 = c^2 - (a-x)^2$ soit $b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$ soit $b^2 - c^2 + a^2 = 2ax$.

$$x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

2. En déduire que $h = \dfrac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}$.

$$h^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2 = \frac{(2ab)^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{(2a)^2}$$

$$h^2 = \frac{\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)}{(2a)^2} = \frac{\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right]}{(2a)^2}$$

$$h^2 = \frac{\left[c-(a-b)\right](c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{(2a)^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(2a)^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}.$$

3. On note p le demi-périmètre du triangle. Démontrer la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$S = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a}$$

$$S = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Exercice 13

Nous cherchons pour quelles valeurs des réels a et b, on a, pour tout ré

$$a(ax+b)+b = ax+b, \text{ soit } a^2x+ab+b = ax+b.$$

En particulier, pour $x=0$ et pour $x=1$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} ab+b=b \\ a^2+ab+b=a+b \end{cases},$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{cases} ab=0 \\ a^2+ab=a \end{cases},$$

$$\begin{cases} a=0 \\ 0b=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} b=0 \\ a^2=a \end{cases},$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b\in\mathbb{R} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases}.$$

Les fonctions affines qui en résultent sont

$$x\mapsto b \text{ ou } x\mapsto 0 \text{ ou } x\mapsto x,$$

c'est-à-dire

$$x\mapsto x \text{ ou } x\mapsto b, \text{ avec } b\in\mathbb{R}.$$

Réciproquement, nous vérifions que les fonctions $x\mapsto x$ ou $x\mapsto b$, avec $b\in\mathbb{R}$, satisfont à

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(f(x))=f(x).$$

Nous en concluons que les fonctions affines qui conviennent sont les fonctions

$$x\mapsto b, \text{ avec } b\in\mathbb{R} \text{ et } x\mapsto x.$$