**Lycée militaire de Saint-Cyr** **DS n°2 de mathématiques** **303**

**Lundi 17 octobre 2016**

*Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.*

## Exercice 1

On étudie l'évolution du nombre de lapins d'une colonie en fonction du numéro du mois $n$ de l'étude. On modélise la situation par la suite $(u_n)$ où pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n + 1$.
On note $d_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Calculer $u_1, u_2, u_3, u_4$ et en déduire $d_1, d_2$ et $d_3$.
2. Conjecturer la nature de la suite $(d_n)$ puis prouver votre conjecture. Expliquer ce que représente $(d_n)$.

## Exercice 2

Le 1er janvier 2000, un client a placé 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.
On note $C_n$ le capital du client au 1er janvier de l'année $2000+n$, où $n$ est un entier naturel.

**1.** Calculer $C_1$ et $C_2$. Arrondir les résultats au centime d'euro.

**2.** Exprimer $C_{n+1}$ en fonction de $C_n$. En déduire que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a la relation :

$$C_n = 3000 \times 1,025^n.$$

**3.** On donne l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Entrée** | Saisir un nombre $S$ supérieur à 3 000 |
| **Traitement** | Affecter à $n$ la valeur 0. *Initialisation*<br>Affecter à $U$ la valeur 3 000 *Initialisation*<br><br>Tant que $U \leqslant S$<br>    $n$ prend la valeur $n+1$<br>    $U$ prend la valeur $U \times 1,025$<br>Fin tant que |
| **Sortie** | Afficher le nombre $2000 + n$ |

**a.** Pour la valeur $S = 3300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de $n$ | 0 | 1 | .......... | |
| Valeur de $U$ | 3 000 | | .......... | |
| Condition $U \leqslant S$ | vrai | | .......... | |

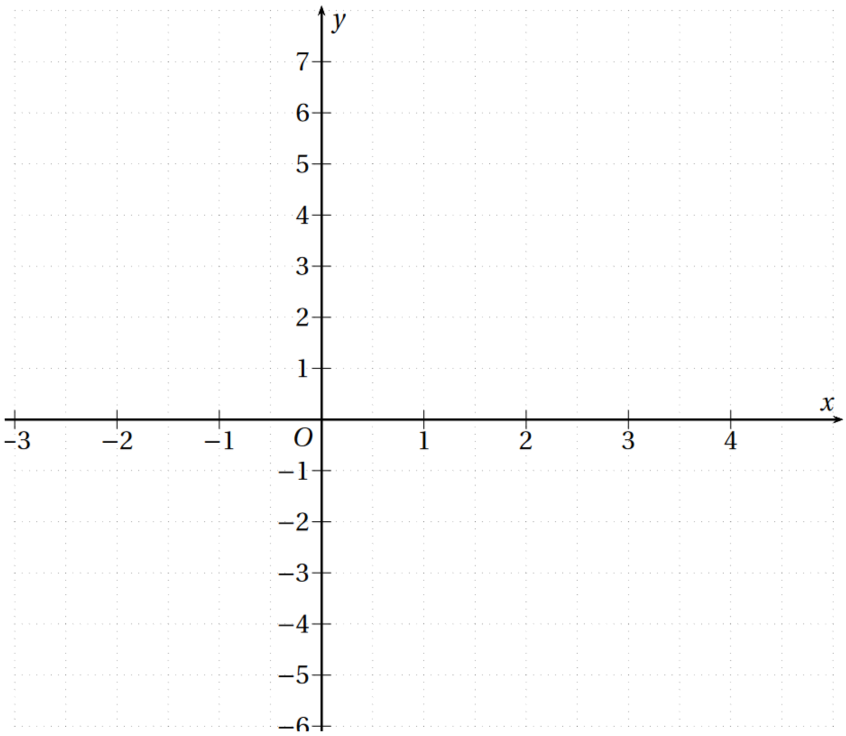
**b.** En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de $S$ saisie est 3 300.

4. Au 1^er^ janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.
5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1^er^ janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

**Exercice 3**

$f$ est la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \in [-2\,;2[ \\ mx + 5 & \text{si } x \in [2\,;4] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de $f$ dans le repère ci-dessous :
   - en vert pour $m = \frac{1}{2}$
   - en bleu pour $m = -2$
2. Comment choisir $m$ pour que $f$ soit continue sur $[-2\,;5]$ ? *Une justification est attendue.* Tracer alors la courbe représentative de $f$ en rouge.

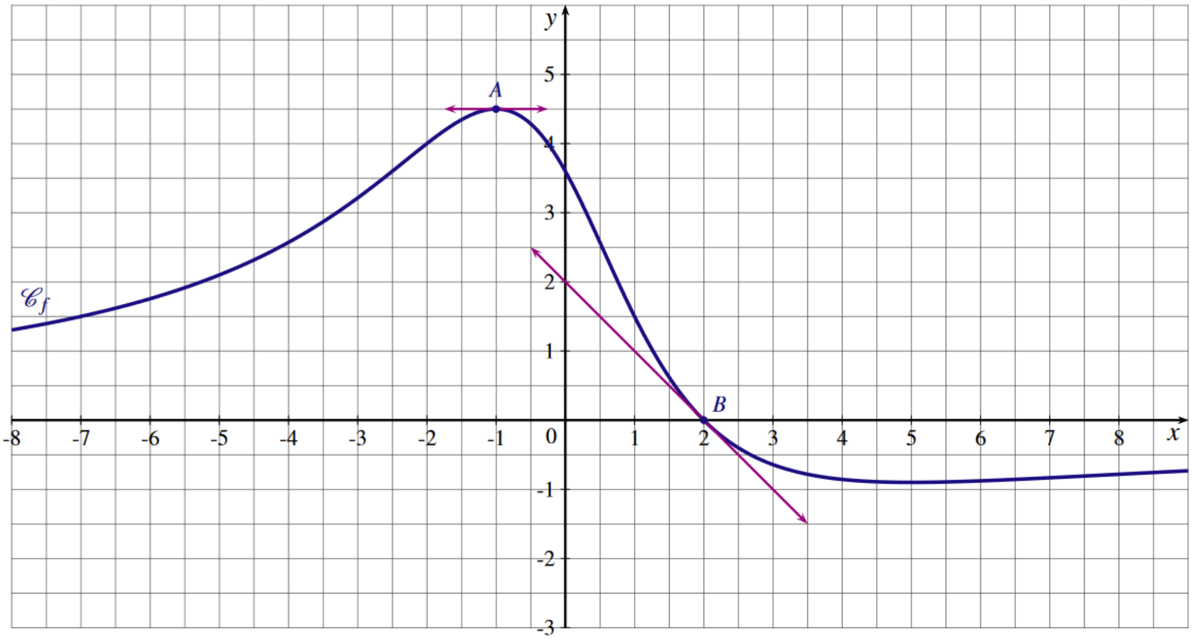


## Exercice 4

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que :

— La tangente au point $A\left(-1;\dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

— La tangente au point $B(2;0)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0;2)$.




On note $f'$ la dérivée de la fonction $f$. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \dfrac{7}{2}$.
   Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.
   a) $f'(0) \times f'(3) \leqslant 0$.
   b) $f'(-3) \times f'(1) \leqslant 0$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$$

1. Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.
   *On indiquera les valeurs approchées au dixième des extremums locaux.*
2. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $]-\infty; 1]$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[1; +\infty[$.
   (c) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
   (d) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.

**BONUS !**

1. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$. Montrer que $C_f$ admet deux tangentes de coefficient directeur $-3$.
2. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On sait que : $C_f$ passe par l'origine du repère, la courbe admet en $A(1\,;1)$ une tangente passant par $B(0\,;2)$ et la courbe admet au point d'abscisse 2 une tangente. Déterminer l'expression de $f(x)$.

**Barème indicatif /25 : Ex 1 : 3,5 Ex 2 : 5 Ex 3 : 4 Ex 4 : 5 Ex 5 : 7,5**