LMSC **Corrigé du DS n°3** **303**

Exercice 1

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?

La courbe représentative de la fonction f'' nous donne le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 3$ donc la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse 3.

2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?

La convexité de la fonction f se déduit du signe de sa dérivée seconde :

Sur $]-\infty;3]$, la dérivée seconde est négative, donc la fonction est concave.
Sur $[3;+\infty[$, la dérivée seconde est positive, donc la fonction est convexe.

3. On note f' la dérivée de la fonction f. Donner le tableau de variation de la fonction f'.

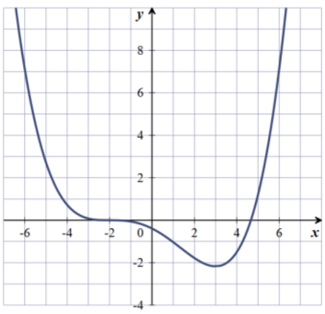
Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variation de la fonction :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

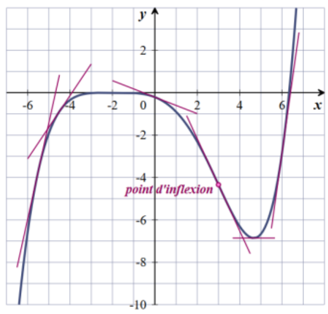
4. Une des deux courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f et l'autre celle de f'. Déterminer la courbe qui représente la fonction f et celle qui représente la dérivée f'.

- La courbe 1 est la courbe représentative d'une fonction décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$. C'est la seule des deux courbes susceptible de représenter la fonction dérivée f'.
- La courbe 2 est la courbe représentative d'une fonction concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$. C'est la seule des deux courbes susceptible de représenter la fonction f.

Courbe 1 représentative de f'



Courbe 2 représentative de f



Exercice 2

1. a. Déterminer $f'(x)$.

f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -3x^2 + 33x - 30$.

b. Étudier les variations de la fonction f.

Les variations de f se déduisant du signe de sa dérivée, étudions le signe de $f'(x) = -3x^2 + 33x - 30$.

Le discriminant du polynôme du second degré $-3x^2 + 33x - 30$ est :

$$\Delta = 33^2 - 4 \times (-3) \times (-30) = 729 = 27^2$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{-33 - 27}{-6} = 10$$

$$\text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{-33 + 27}{-6} = 1$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines. Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

2. a. Déterminer $f''(x)$.

f'' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = -6x + 33$.

b. Étudier la convexité de la fonction f.

La convexité de la fonction f se déduit du signe de sa dérivée seconde :

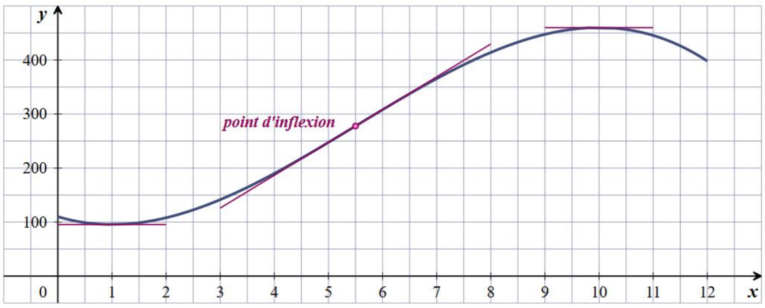
x	$-\infty$		5,5		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Sur $\left]-\infty; \frac{11}{2}\right]$, la dérivée seconde est positive, donc la fonction f est convexe.

Sur $\left[\frac{11}{2}; +\infty\right[$, la dérivée seconde est négative, donc la fonction f est concave.

PARTIE B

La fonction f, définie dans la partie A, modélise sur l'intervalle $[0; 12]$, le cours d'une action sur une année.
x est le temps écoulé exprimé en mois et $f(x)$ est le cours de l'action en euros.



1. Sur un an, quel a été le cours le plus bas de cette action ? le cours le plus haut ?

D'après le tableau des variations de la fonction f :

- Le minimum de la fonction est atteint pour $x = 1$ et

$$f(1) = -1 + 16{,}5 - 30 + 110 = 95{,}5$$

- Le maximum de la fonction est atteint pour $x = 10$ et

$$f(10) = -1000 + 1650 - 300 + 110 = 460$$

2. À quel moment la croissance du cours de cette action s'est-elle ralentie ?

Sur l'intervalle $[1; 10]$, la fonction f est croissante, convexe sur $\left[1; \frac{11}{2}\right]$ et concave sur $\left[\frac{11}{2}; 10\right]$ donc :

la croissance du cours de l'action s'est ralentie au bout de cinq mois et demi.

Exercice 3

On a $g'(x) = 2f'(x) + 6\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2f'(x) + \frac{3}{\sqrt{x}}$.

$g''(x) = 2f''(x) - 3\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = 2f''(x) - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

Or, comme f est concave sur $\mathbb{R}$, $f''(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

On a donc pour $x > 0, g''(x) < 0$ soit <u>g concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.</u>