Lycée militaire de Saint-Cyr **Devoir Libre n°2 de mathématiques** **TES**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés.

A rendre pour le mardi 3 janvier 2017.

Exercice 1 *Spot publicitaire et exponentielle…*

Un distributeur étudie l'influence du nombre de diffusions journalières d'un spot publicitaire sur la vente d'un de ses produits. Une étude de marché a montré que, pour n diffusions journalières du spot, l'efficacité correspondante peut s'évaluer par le nombre $\frac{6}{1+5e^{-\frac{n}{3}}}$.

On considère donc la fonction f qui exprime l'efficacité, définie sur $I = [0\,;20]$ par $f(x) = \frac{6}{1+5e^{-\frac{x}{3}}}$.

Le but de ce problème est de déterminer le nombre de diffusions journalières du spot pour lequel le rendement est maximal.

1. a. Calculer $f(0)$ puis $f'(x)$ pour x élément de I.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Vérifier que, pour tout x de I, $f'(x) = \frac{1}{18}f(x)[6 - f(x)]$,
   puis en déduire que $f''(x) = \frac{1}{9}f'(x)[3 - f(x)]$.
3. Résoudre dans I l'inéquation $f(x) \geq 3$.
   En déduire le signe sur I de $f''(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction dérivée f'. On y fera figurer la valeur exacte x_0 en laquelle f' atteint son maximum.
5. On décide de choisir pour nombre de diffusions journalières du spot le nombre entier n_0 le plus proche du nombre x_0 déterminée à la question 4. Donner n_0.

Exercice 2 **Pour les spécialistes –** *Fibonacci et les lapins*

Un peu d'histoire des maths pour commencer :

Au tout début du XIII[e] siècle Léonard de Pise, dit Fibonacci, propose dans son *Liber Abaci* (manuel de mathématiques à l'usage des commerçants) un problème à propos de la démographie des lapins, qui mène (avec nos notations modernes) à l'étude de la suite (F_n) définie par :

$$\boxed{F_0 = F_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n}$$

1. a. Calculer les dix premiers termes de la suite (F_n).
   b. On pose $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   Démontrer que l'on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $U_n = A^n U_0$.

2. a. On donne $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b. Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
   c. Démontrer que $A = PDP^{-1}$ puis que pour tout entier n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Ecrire explicitement les coefficients de la matrice A^n.
3. a. Déduire de la question 1.c. que le terme général de la suite (F_n) est :
   $F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   b. Vérifier cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$.