I Quelques rappels

Définition Soit a et $(a+h)$ appartenant à I. Dire que f est dérivable en a signifie que le taux d'accroissement entre a et $a+h$, $\tau_{a,h}$, tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
Ce nombre L est appelé nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau_{a,h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

Propriété Soit f dérivable en $a \in I$ et C la courbe représentative de f.
(i) Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.
(ii) L'équation de la tangente au point $A(a\,;f(a))$ est la suivante : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

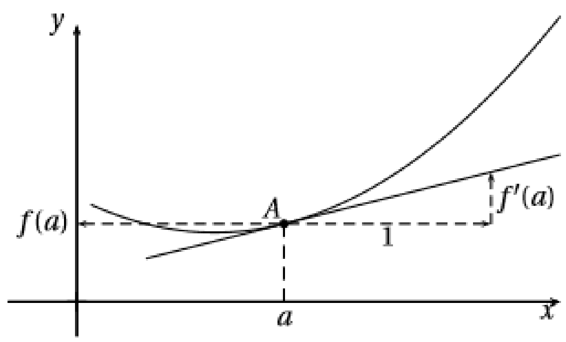


Figure : Interprétation graphique du nombre dérivé

Fonction f	Ensemble de définition de f	**Fonction dérivée f'**	Ensemble de définition de f'
k	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

Dérivées usuelles (à connaître par cœur !)

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Formules de dérivation (à connaître par cœur !)

Voici la propriété fondamentale :

Propriété Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences suivantes :
(i) Pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur I.
(ii) Pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante sur I.
(iii) Pour tout réel x de I, $f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur I.

Remarques

1. Si les inégalités sont strictes ($<;>$) alors on rajoute « strictement ».
2. Si il existe $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente horizontale en x_0.

Exemple d'étude

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{4x-3}{x^2+1}$$

1. Calculer $f'(x)$.
   Sur $\mathbb{R}$ f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.
   $f = 1 - \frac{u}{v}$ d'où $f' = -\frac{u'v-uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x,

$$\begin{array}{lll} u(x) = 4x-3 & \text{d'où} & u'(x) = 4 \\ v(x) = x^2+1 & \text{d'où} & v'(x) = 2x \end{array}$$

Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$:

Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a = 4$, $b = -6$ et $c = -4$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	

II Fonction continue

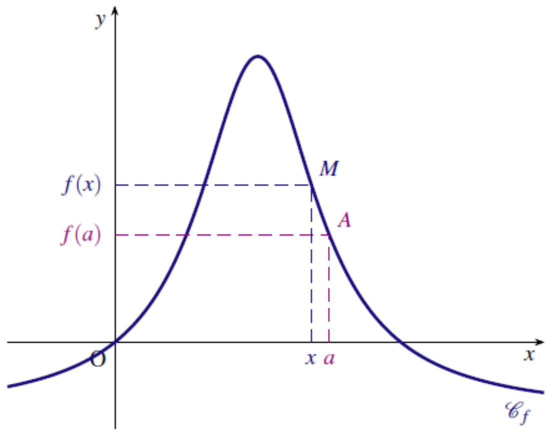
2.1 Notion de continuité

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Dire que f est continue signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (sans lever le crayon).

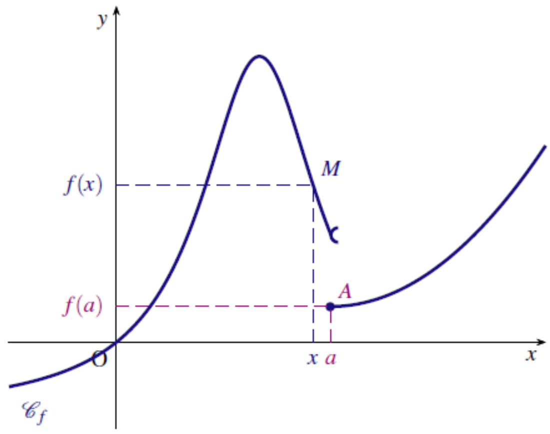
Exemple et contre-exemple

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

Pour tout réel x de I, on considère le point M d $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.



La fonction f est continue.
Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

Propriété Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque Attention, la réciproque est fausse ! Prenez la fonction racine carrée : sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ on peut tracer la courbe de la fonction racine carrée mais par contre elle n'est pas dérivable en 0. En effet :

Conséquences

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

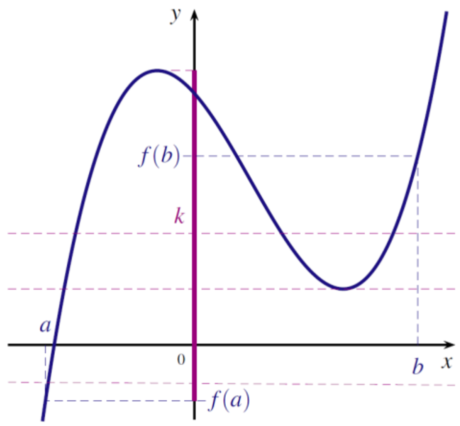
III Continuité et équation

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux réels de I.
Pour toute valeur de k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. (Autrement dit : la fonction f prend, entre a et b toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$).
C'est-à-dire que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

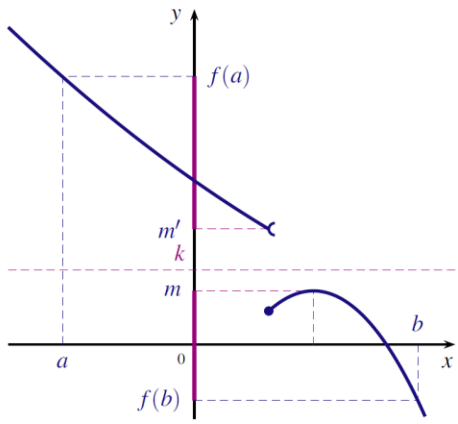
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ est un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

3.2 Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Propriété *Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour toute valeur de k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
C'est-à-dire que l'équation $f(x) = k$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Application Détermination du signe d'une fonction

Soit $f : x \longmapsto 0{,}1x^3 + x - 4$, la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;3]$.

1. On résout l'équation $f(x) = 0$. On dresse le tableau de variation de la fonction f.
   $f'(x) = 0{,}3x^2 + 1$.
   $f'(x) > 0$ ($f'(x)$ est la somme de deux termes positifs).

x	2	3
f	-1,2 ↗	1,7

On applique le corollaire : f est continue et strictement croissante sur $[2\,;3]$. De plus, $0 \in [1{,}2\,;1{,}7]$. Donc, l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[2\,;3]$. A l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de la solution : 2,48.

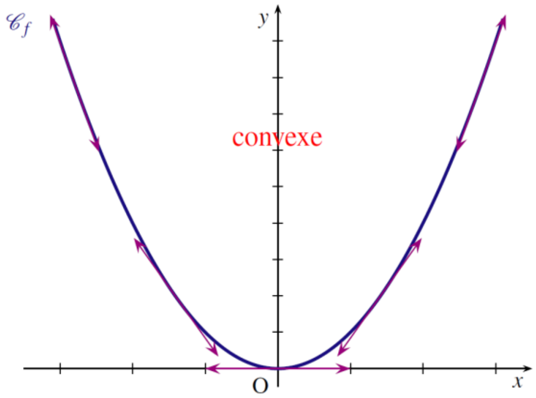
2. On s'intéresse au signe suivant les valeurs de x :
   $x < 2{,}48 \Rightarrow f(x) < f(2{,}48) = 0 \Rightarrow f(x) < 0$ (car f est croissante),
   $x = 2{,}48 \Rightarrow f(x) = f(2{,}48) = 0$,
   $2{,}48 < x \Rightarrow f(2{,}48) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$.
3. En conclusion, on dresse le tableau de signe de f :

IV Convexité

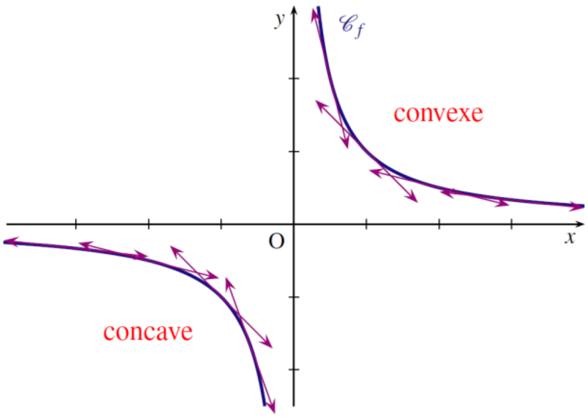
4.1 Fonction convexe, fonction concave

Définition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
(i) f est convexe sur I si $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
(ii) f est concave sur I si $\mathcal{C}_f$ est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Exemples



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

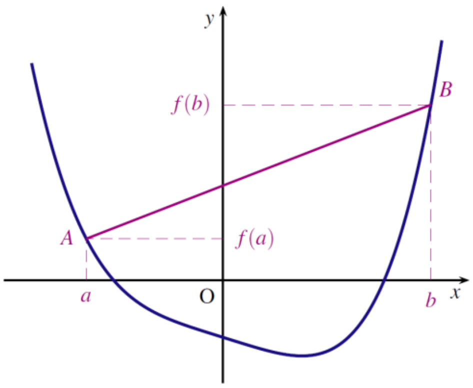
Remarque

1.

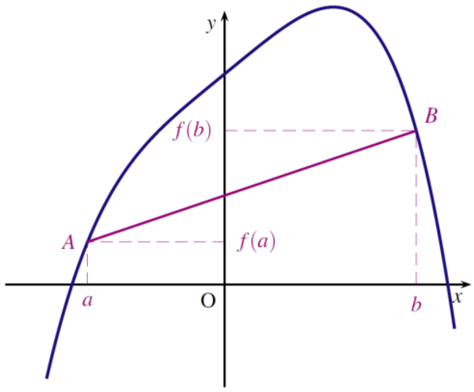
Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$

— Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.

— Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



f est convexe.



f est concave

2. L'étude de la convexité apporte des indications sur la façon de croître ou de décroître d'une fonction. Ainsi, une fonction croissante convexe « croît de plus en plus », comme la fonction carré sur $[0\,;\,+\infty[$. Au contraire, une fonction croissante concave croît « de moins en moins », comme la fonction racine carrée sur $[0\,;\,+\infty[$.

Théorème *Admis*
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
(i) f est convexe sur I si, et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
(ii) f est concave sur I si, et seulement si sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Conséquences

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'.
— Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
— Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$$

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		↘		↗	
convexité de f		CONCAVE		CONVEXE	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

4.2 Point d'inflexion d'une courbe

Définition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On dit que $\mathcal{C}_f$ présente un point d'inflexion si elle traverse sa tangente en ce point.

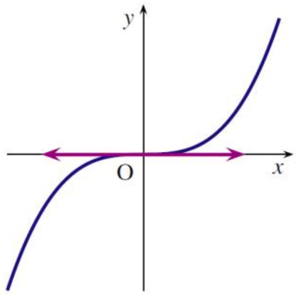
Exemple

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.



Conséquences

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

Exemple Soit $f\colon \longmapsto x^5 - 5x^4$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'		↘		↘		↗	

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3; f(3))$.

En effet :

— $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty;3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$).

— f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A\,(3;-162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$).