Chapitre 3 **FONCTION EXPONENTIELLE** **TES**

« La plus grande faiblesse de la race humaine vient de son incapacité à comprendre la fonction exponentielle. »

Albert Bartlett[1]

I Fonctions exponentielles de base q (avec $q > 0$)

1.1 Définition

Définition - propriété q désigne un nombre réel strictement positif. On considère le nuage de points représentatif de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux conditions suivantes :
(i) la courbe représentative de f réalise un prolongement continu de ce nuage ;
(ii) f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
(iii) pour tous nombres réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (on dit qu'il s'agit d'une relation fonctionnelle).
Cette fonction est appelée la fonction exponentielle de base q. On note pour tout nombre réel x, $f(x) = q^x$.

Exemple (à l'aide de la calculatrice) Pour calculer lorsque $q = 1{,}21$, $f(2{,}3) = 1{,}21^{2{,}3}$ on tape 1.21 ^ 2.3. On lit $1{,}21^{2{,}3} \approx 1{,}55$.

Cas particuliers 1) $q^0 = 1$ 2) $q^1 = q$ 3) $q^{-1} = \frac{1}{q}$ 4) Pour tout nombre réel x, $1^x = 1$

1.2 Propriétés algébriques

Propriétés Pour tous nombres réels x et y et pour tout nombre réel $q > 0$, on a :
(i) *Relation fonctionnelle* $q^{x+y} = q^x q^y$
(ii) $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$
(iii) $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$
(iv) $q^x > 0$
(v) $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$
(vi) Pour tout entier naturel $n > 0$, $q^{\frac{1}{n}}$ est « la racine n-ème de q »
(vii) Pour tout nombre entier naturel n, $(q^x)^n = q^{x\times n}$

Démonstrations

pour $y = -x$, on a : $1 = q^0 = q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ d'où $\dfrac{1}{q^x} = q^{-x}$ et donc $q^x \neq 0$.

[1] Formule énoncée par le physicien américain qui avait à maintes reprises alerté à propos de la dimension exponentielle qui selon lui caractérisait la modernité depuis la fin de la seconde guerre mondiale, et qui avait analysé nombre d'effets induits, particulièrement l'épuisement à terme inévitable des ressources naturelles. L'enjeu de notre époque consiste à se demander comment se comporter dans un monde de flux se déplaçant, au propre comme au figuré, à la vitesse de la lumière.

$q^{x-y} \overset{②}{=} q^x \times q^{-y} \overset{③}{=} \frac{q^x}{q^y}$.

on note que $(q^x)^n = q^x \times \cdots \times q^x = q^{x+\cdots+x} = q^{nx}$.

$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^x > 0.}$

En effet, $q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ avec $q^x \neq 0$.

$q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x > 0$.

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\frac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

Exemples 1) $1{,}5^4 \times 1{,}5^{-2} =$

2) $\frac{0{,}6^{2{,}1}}{0{,}6^{-3{,}9}} = 0{,}6^{2{,}1+3{,}9} = 0{,}6^7$

3) $(1{,}5^{2{,}5})^2 = 1{,}5^{2{,}5\times 2} = 1{,}5^5$

1.3 Sens de variation

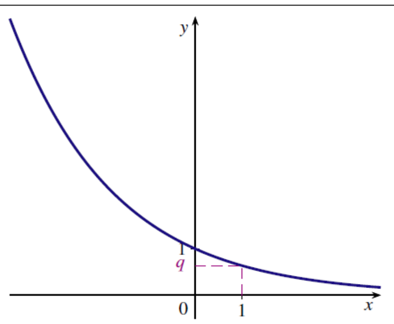
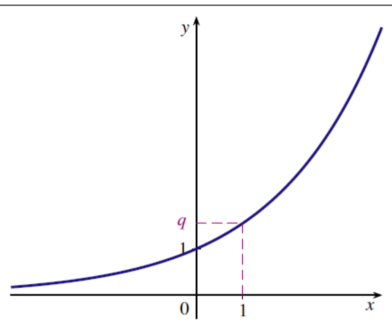
En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

Propriété (i) Si $0 < q < 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) Si $q = 1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
(iii) Si $q > 1$la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence

Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si, $a = b$.

Synthèse

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = +\infty$
	
La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$	

Remarque La fonction $x \longmapsto k \times q^x$ ($k > 0$) a les mêmes variations que $x \longmapsto q^x$.

Un peu d'histoire des maths

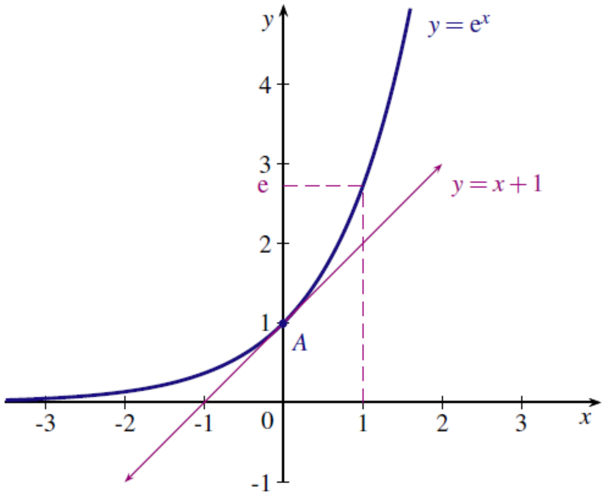
On doit à Jean Bernoulli, mathématicien suisse (1667 – 1748), l'introduction des fonctions exponentielles. Il est le premier d'une lignée de mathématiciens suisse d'origine anversoise. La famille Bernoulli s'exile alors que le général Fernando Alvarez De Toledo, plus connu sous le nom de duc D'Albe, fait régner la terreur dans les Flandres, qu'il gouverne de 1567 à 1573 au nom du roi d'Espagne Philippe II. Sur les conseils de son père, il étudie d'abord la théologie mais il se tourne rapidement vers l'astronomie, les mathématiques et la physique. Il voyage en France, en Angleterre et dans les Flandres pour rencontrer les scientifiques de renom. A son retour en Suisse en 1687, il devient professeur à l'université de Bâle, où il demeurera jusqu'à sa mort ; de cette époque datent ses principaux travaux. Le grand mérite de Jacques Bernoulli est de développer le calcul infinitésimal et de l'adapter à de nombreuses situations, en particulier à l'étude des courbes. Il étudie les courbes isochrones (courbe plane qui décrit un corps en train de tomber, la composante verticale de la vitesse étant uniforme) et le rayon de courbure. On lui doit des études sur les coniques, la spirale logarithmique, la cycloïde, la tractrice et la lemniscate. Il introduit en 1691 le terme calcul intégral (ce que l'on verra un peu plus tard) dans son sens mathématique actuel. Il est le premier à utiliser les coordonnées polaires et il sait dériver avec de telles coordonnées. On doit à Jacques Bernoulli des travaux sur les séries avec des démonstrations rigoureuses de convergence (). L'intérêt que porte Jacques Bernoulli au calcul des probabilités l'amène à s'interroger sur les notions de probabilité « géométrique » a priori donnée pour des raisons de symétrie du problème, et de probabilité a posteriori constatée par la fréquence d'apparitions. On lui doit une démonstration rigoureuse de la loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face.

Œuvres **:** - Acta eruditorum (1690)
- Ars conjectandi (1713)

II <u>La fonction exponentielle</u>

2.1 <u>Définition</u>

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit 1. Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0\,;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1. Cette valeur particulière du réel q est notée e. Ce nombre est irrationnel (comme $\sqrt{2}, \pi$, ...) et une valeur approchée est $e \approx 2{,}71828$ (calculatrice : e ^1).



Définition La fonction $x \longmapsto e^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle. On la note exp . $$\exp : x \longmapsto e^x$$

Conséquences

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = e^x$
- $\exp(0) = e^0 = 1$, $\exp(1) = e^1 = e$, $\exp(-1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, $\exp(0{,}5) = e^{0,5} = \sqrt{e}$
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, $e^x > 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$
- Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

  $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, $(e^x)^m = e^{mx}$

Exemples 1) Simplification de $A = \left(e^{-\sqrt{2}-5} \times e^{\sqrt{2}-20}\right) \div e^{-24}$:

$A = \left(e^{-\sqrt{2}-5+\sqrt{2}-20}\right) \div e^{-24} = e^{-25} \times e^{24} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2) Simplification de $B = \frac{e^x-1}{e^x+1} + \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$:

En multipliant par $\frac{e^x}{e^x}$ la 2ème fraction, on obtient : $B = \frac{e^x-1}{e^x+1} + \frac{1-e^x}{1+e^x} = 0$.

3) Simplification de $C = \left(e^{e^2}\right)^{-3}$:

$$C = \left(\frac{1}{e^{e^2}}\right)^3 = \frac{1}{e^{3e^2}}$$

2.2 Etude la fonction exponentielle

Propriété La dérivée de la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée. Ainsi, pour tout nombre réel $x, exp'(x) = e^x$

Démonstration

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \times \frac{e^h-1}{h}$$

Or $\exp'(0)=1$ signifie que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{0+h}-e^0}{h} = 1$ soit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$.

Donc pour tout réel x, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} e^x \times \dfrac{e^h-1}{h} = e^x$

Propriété La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $e^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$x \mapsto \exp x$	$\nearrow$

Conséquences importantes

— Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < e^x \leqslant 1$

— Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$

— Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \iff x = y$ et $e^x < e^y \iff x < y$

Exemples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$:

$$e^{1-3x} < e^{2x+3} \iff 1-3x < 2x+3 \iff -5x < 2 \iff x > -\frac{2}{5}$$

D'où l'ensemble solution $S = \left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geqslant 1$:

$$e^{x^2-1} \geqslant 1 \iff e^{x^2-1} \geqslant e^0 \iff x^2-1 \geqslant 0$$

D'où l'ensemble solution $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

3. Résolution de $e^{x^2-1} = 1$: Il faut que l'on ait de part et d'autre du signe " $=$ " une exponentielle ; l'équation à résoudre devient donc $e^{x^2-1} = e^0$ soit $x^2-1=0$ donc $x=1$ ou $x=-1$.

Remarque

$e > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

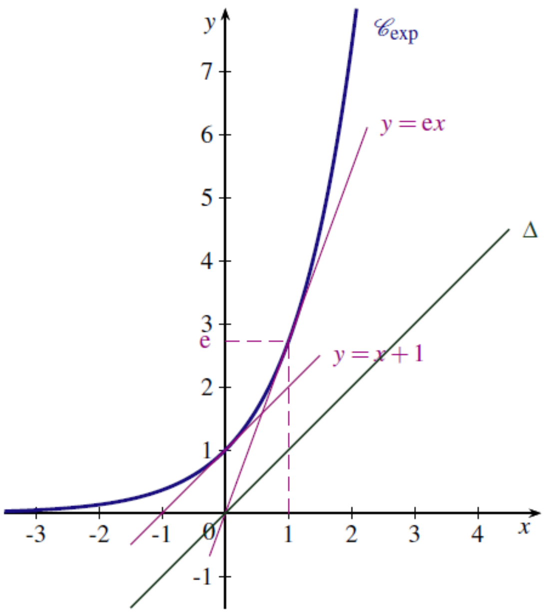
$e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim\limits_{n \to -\infty} e^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n = 0$. Par prolongement, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Propriété La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = e^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

Courbe représentative



1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x - 1) + \exp(1)$ Soit $y = ex$
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.

III Fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = e^u$.

Exemples

— La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = e^u$.

— La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5e^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$

Propriété Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

Exemples

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$.
   Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0{,}5x^2-2x+1}$.
   Pour tout réel x, posons $u(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-2)e^{0{,}5x^2-2x+1}$.

Conséquence Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

En effet :

Si u est dérivable sur I, alors la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
Or pour tout réel $x \in I$, $e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.