Lycée militaire de Saint-Cyr **Devoir Libre de mathématiques** **1reS**

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importantes dans l'appréciation des copies. Tous vos résultats doivent être soulignés.

A rendre pour le mercredi 4 janvier 2017.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n+36}{-u_n-5} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

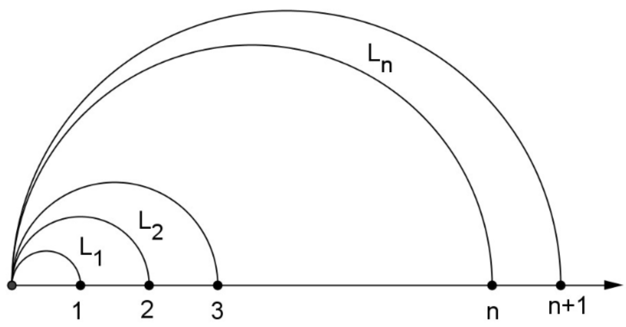
1. Calculer u_1 et u_2.
   La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n+6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   Que peut-on conjecturer sur la nature de (v_n) ?
   (b) Démontrer la conjecture.
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   (e) Étudier la monotonie de (u_n).
   (f) Calculer u_{20}.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, L_n est l'aire de la partie du plan comprise entre deux demi-cercles successifs sur la figure ci-contre.

1) Montrer que la suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique.

2) Calculer la somme $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$.



Corr ex 2

1) Montrer que la suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique.

Souvenons-nous que … $\text{l'aire d'un disque} = \pi \times r^2$. Donc $\text{aire d'un demi-disque} = \frac{\pi}{2} \times r^2$.

Ainsi : $L_n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(n^2+2n+1-n^2) = \frac{\pi}{8}(2n+1)$ $\boxed{L_n = \frac{\pi}{8}(2n+1) = \frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}}$

Montrons que cette suite est arithmétique :

◊ Méthode 1 : $L_{n+1} - L_n = \frac{\pi}{8}[2(n+1)+1] - \frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{\pi}{8}(2n+2+1-2n-1) = \frac{\pi}{8} \times 2 = \frac{\pi}{4}$ donc (L_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. Son premier terme est $L_1 = \frac{3\pi}{8}$.

◊ Méthode 2 : $L_n = \frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{8}$ est de la forme $L_n = an+b$. Elle est donc arithmétique de raison $a = \frac{\pi}{4}$.

2) $S_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = N \times \left(\frac{P+D}{2}\right) = \frac{n}{2} \times \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}(2n+1)\right) = \frac{n\pi}{16} \times (3+2n+1) = \frac{n\pi}{8} \times (n+2) = \frac{\pi}{8}(2n+n^2)$.