Exercice 1

Etudier les fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $f(x) = x^2e^{-2x}$
2. $g(x) = e^{-x^2}$

Exercice 2 *d'après France métropolitaine, La Réunion – Septembre 2009*

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
3. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées. Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;8]$ dans le plan.

Exercice 2 *d'après Polynésie septembre 2007*

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;+\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0\,;1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. Étudier la convexité de f et l'existence de point d'inflexion pour sa courbe.

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0\,;4]$.

Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}$.

À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à $0,5$ euro ?