Chapitre 4	PROBABILITES	TES

« En augmentant le nombre d'observations, nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres des cas qui font qu'un événement peut arriver et ceux qui font qu'il ne peut pas. »

J. Bernoulli

I Quelques rappels

1.1 Généralités

(i) *Définitions*

* Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat est incertain.

* L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé univers des possibles. Il est noté Ω. On supposera dans la suite que l'univers est fini de cardinal n.

* Les résultats d'une expérience aléatoire sont appelés issues ou éventualités, notées ω_i.

* Un événement est une partie de Ω.

* L'ensemble des parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

* L'événement certain est Ω.

* L'événement impossible est $\emptyset$.

* Un événement élémentaire est constitué d'une seule éventualité : $\{\omega_i\}$.

* L'intersection de deux événements A et B est notée $A \cap B$. C'est l'ensemble des issues situées dans A et dans B.

* La réunion de deux événements A et B est notée $A \cup B$. C'est l'ensemble des issues situées dans A ou dans B ou dans les deux.

* L'événement contraire de A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble des issues situées dans Ω mais pas dans A.

* Deux événement A et B sont dits incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. On dit encore qu'ils sont disjoints.

(ii) *Probabilité sur* Ω

Toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,;1]$ vérifiant les des conditions suivantes :

- $P(\Omega) = 1$;
- si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

est appelée probabilité sur Ω.

(iii) *Propriétés*

* $P(\emptyset) = 0$.

* $P(\Omega) = 1$.

* La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1 soit : $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.
* $P(A)$ est la somme des probabilités de toutes les issues constituant A.
* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(iv) *Equiprobabilité*

Dans le cas d'équiprobabilité, on a :

$\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P(A)} = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{n}$.

Exemple Sur 1000 ordinateurs vendus, un marchand observe que 80 ont exigé une réparation dans la deuxième année qui a suivi l'achat (événement noté R_2) et 125 lors de la troisième année qui a suivi l'achat (événement noté R_3), dont 20 avaient déjà été réparés lors de la deuxième année. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à acheter un ordinateur à ce marchand dont l'univers Ω est l'ensemble des 100 ordinateurs. Voici le tableau à double entrée suivant modélisant la situation :

	$\boldsymbol{R_2}$	$\boldsymbol{\overline{R_2}}$	***Total***
$\boldsymbol{R_3}$	20	105	125
$\boldsymbol{\overline{R_3}}$	60	815	875
Total	80	920	1000

La probabilité que l'ordinateur ait été réparé la deuxième et la troisième année est :

$P(R_2 \cap R_3) = \frac{20}{1000} = 0{,}02$.

La probabilité que l'ordinateur n'ait pas été réparé la deuxième année est :

$P(\overline{R_2}) = \frac{920}{1000} = 0{,}920$.

La probabilité que l'ordinateur ait subi au moins une réparation est :

$$P\big((R_2 \cap \overline{R_3}) \cup (\overline{R_2} \cap R_3) \cup (R_2 \cap R_3)\big)$$

$$= P(R_2 \cap \overline{R_3}) + P(\overline{R_2} \cap R_3) + P(R_2 \cap R_3) = \frac{60}{1000} + \frac{105}{1000} + \frac{20}{1000}$$

$= \frac{185}{1000} = 0{,}185$.

La probabilité que l'ordinateur n'ait subi aucune réparation est :

$P(\overline{R_2 \cup R_3}) = P(\overline{R_2} \cap \overline{R_3}) = \frac{815}{1000} = 0{,}815$.

1.2 Variables aléatoires discrètes

(i) *Définition*

Une variable aléatoire réelle X, définie sur l'univers Ω muni d'une probabilité P, est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega_i \longmapsto X(\omega_i).$$

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$. Quand $X(\Omega)$ est fini (ce qui est le cas lorsque Ω est fini), on dit que X est une variable aléatoire discrète.

On note :

* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ avec $k \leq n$.

* $\{X = x_i\}$ l'événement formé des issues qui ont pour image x_i par X.

(ii) *Loi de probabilité d'une variable aléatoire*

Lorsque, à chaque valeur x_i de $X(\Omega)$, on associe la probabilité $P(\{X = x_i\})$, on définit sur l'univers image $X(\Omega)$ une loi de probabilité appelée loi de probabilité de la variable aléatoire X**.**

(iii) *Espérance*

L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$ est la moyenne des x_i affectés des coefficients respectifs $P(X = x_i)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, P(X = x_i).$$

(iv) *Propriétés*

X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$ (linéarité de l'espérance).

1.3 Lois discrètes

(i) Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve admettant deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S dont la probabilité est p (un réel),
- l'autre appelée « échec » notée $\bar{S}$ dont la probabilité est $1 - p$.

p est appelé « paramètre de Bernoulli ».

La variable aléatoire X définie sur Ω prend la valeur 1 avec la probabilité p si S est réalisé et la valeur 0 avec la probabilité $1 - p$ sinon. La loi de X appelée loi de Bernoulli est donnée par le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	0	1
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$1 - p$	p

On a : $E(X) = p$.

Exemple Dans l'expérience du lancer de dé équilibré, si le succès est : « obtenir un 6 ». Alors, on est dans le cas d'une épreuve de Bernoulli où $p = \frac{1}{6}$.

(ii) *Loi binomiale*

On appelle schéma de Bernoulli une expérience aléatoire consistant à répétant n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une même épreuve de Bernoulli de paramètre p, de façon indépendante.

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (où $0 \leq k \leq n$) compte le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.

Dans un schéma de Bernoulli de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Pour tout k entier, $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a : $E(X) = np$.

Exemple Soit l'expérience du lancer de dé équilibré que l'on répète trois fois. Soit X la variable aléatoire modélisant le nombre de fois où l'on obtient un 6. Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$. On a :

Pour tout k entier, $0 \leq k \leq 3$, $P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$.

La probabilité de tomber deux fois sur 6 est :

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \approx 0{,}069.$$

L'espérance est :

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

II Probabilités conditionnelles

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un événement.

2.1 Définition

Définition Soient A et B deux événements d'un même univers tel que $P(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé se note $P_A(B)$ et on a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque

Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Exemple

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.
Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.
Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?
Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ».

— 12% des articles ont a un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = 0{,}12$.

— 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = 0{,}06$ et $p(E) = 0{,}08$.

La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cup E) = p(F) + p(E) - p(F \cap E) \quad \text{d'où} \quad p(F \cap E) = 0{,}08 + 0{,}06 - 0{,}12 = 0{,}02$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2.2 Propriétés

Propriétés Soient A et B deux événements d'un même univers tel que $P(A) \neq 0$.
P_A est une probabilité et possède les propriétés (classiques) d'une probabilité :
(i) $0 \leq P_A(B) \leq 1$
(ii) $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$

Propriété *Formule des probabilités composées*
Soient A et B deux événements d'un même univers tel que $P(A) \neq 0$.
Si on connaît la probabilité conditionnelle de B sachant A, $P_A(B)$, alors la probabilité de A et B est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

III Formules des probabilités totales

3.1 Cas de deux événements

Propriété Si A est un événement d'un univers Ω tel que $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$, alors pour tout événement B de Ω :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$$

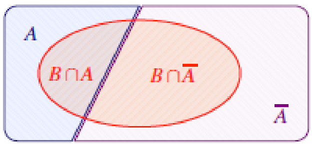
Démonstration

Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

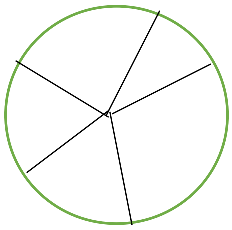
D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$



3.2 Partition d'un univers Ω

Propriété Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un ensemble d'événements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si tout événement élémentaire de Ω appartient à l'un des événements A_i et à un seul. C'est-à-dire si, et seulement si,
(i) Pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.
(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.



Remarques

— Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

— Si les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = 1$$

Exemple On tire on sort un élève d'un lycée participant à l'UNSS ; il ne peut être inscrit qu'à une seule des trois activités proposées par l'UNSS : Volley (V), Tennis (T) ou Natation (N).
- L'UNSS propose seulement volley, tennis ou natation donc $V \cup T \cup N = \Omega$ où Ω est l'ensemble des élèves inscrits à l'UNSS.
- Un élève ne peut choisir qu'une seule de ces activités. Donc les événements V, T et N sont deux à deux incompatibles c'est-à-dire : $V \cap N = \emptyset, V \cap T = \emptyset$ et $T \cap N = \emptyset$.

Les événements V, T et N forment donc une partition de l'univers.

3.3 Propriété

Propriété *Formule des probabilités totales*
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition d'un même univers Ω. Alors pour tout événement B de Ω, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Remarque On en déduit donc : $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Exemple

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

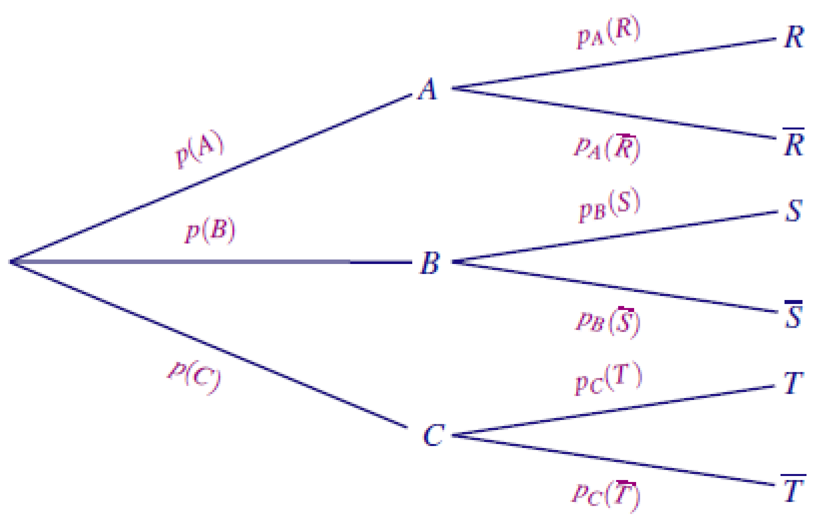
On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?
Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »
Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(S) + p_C(S) \times p(S) \\ &= 0{,}15 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

IV Représentation sous forme d'arbre pondéré

Une expériende aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



— La racine de l'arbre est l'univers Ω

— Les évènements qui se trouvent aux extremités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.

Par exemple, $\{A,B,C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S,\overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.

— Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.

Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.

— Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.

Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

RÈGLES

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

— La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

— La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.

BILAN