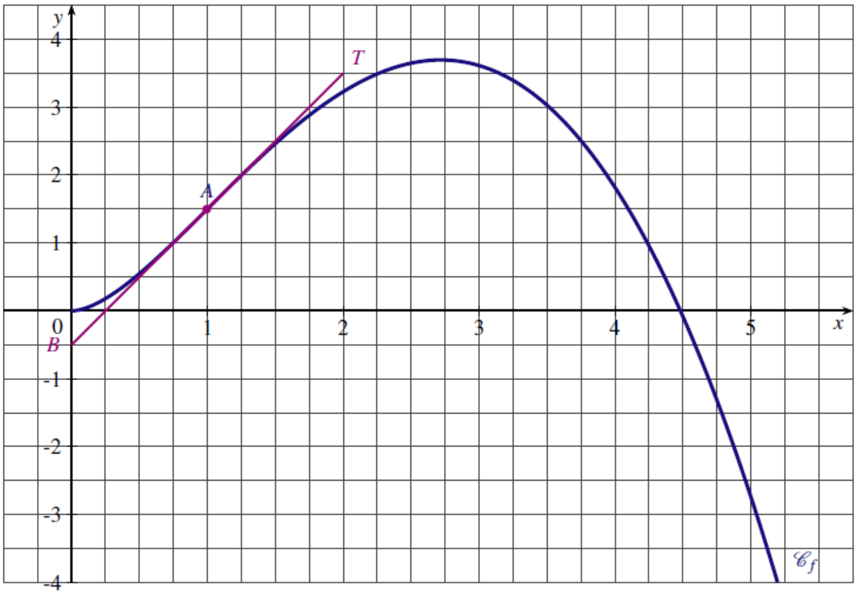
Exercice 1

PARTIE A

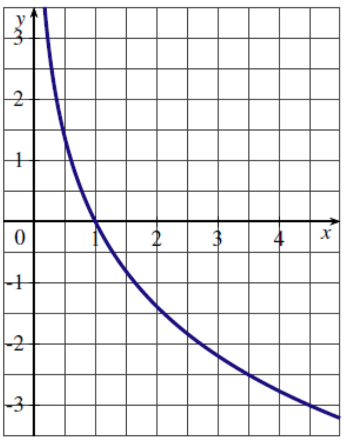
La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous dans un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.



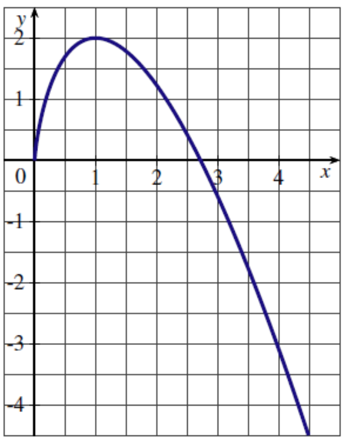
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f, déterminer $f'(1)$.
2. Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
3. Une seule des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée seconde f'' : laquelle ?

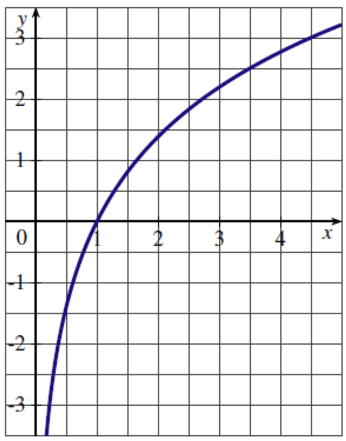
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



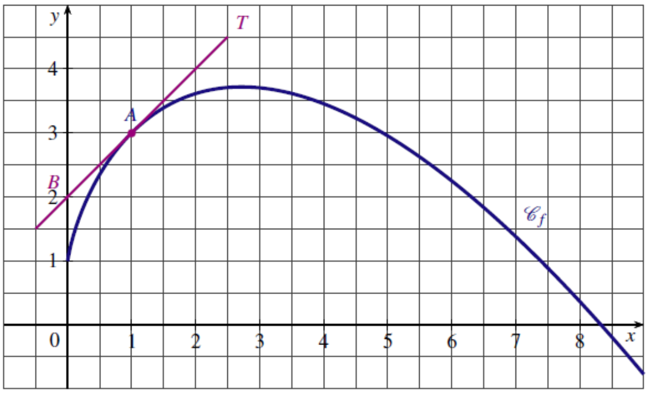
PARTIE B

La fonction f de la partie A est définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 2x \times (1 - \ln(x))$.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. On note f'' la dérivée seconde de f sur $]0; +\infty[$. Calculer $f''(x)$ puis, étudier la convexité de la fonction f.

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 2x - x\ln(x) + 1$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.



1. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(1; 3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\,(0; 2)$. Déterminer $f'(1)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - \ln(x)$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x) \leqslant 0$.
   c) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Étudier la convexité de la fonction f.

Exercice 3 *D'après BAC 2012 Polynésie*

Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut en produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle $[1 ; 6]$.
Le coût total de production C_T, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln x + 5{,}6 \quad \text{pour } x \in [1 ; 6].$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 6]$.
2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in [1 ; 6]$.
   On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.
   a) Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
   b) On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 6]$ et on appelle C'_M sa fonction dérivée. Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \dfrac{x^2 - 3{,}2 - 8\ln x}{2x^2}$ pour tout x de l'intervalle $[1 ; 6]$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$ par $f(x) = x^2 - 3{,}2 - 8\ln x$.

   a) On admet que f est dérivable sur $[1\ ;\ 6]$. Étudier les variations de f sur $[1\ ;\ 6]$.

   b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $[2\ ;\ 6]$; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α.

   c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1\ ;\ 6]$ (on ne demande pas de justification).

4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question 3. b.

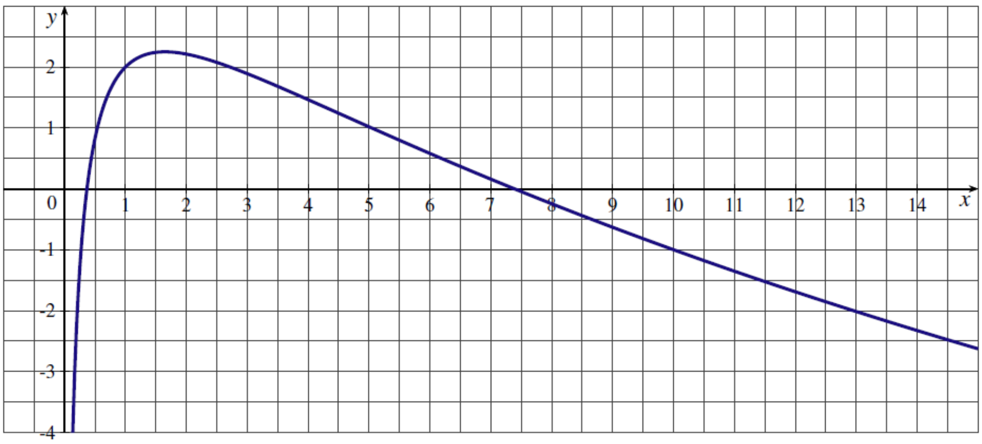
   a) En utilisant les résultats de la question 3., étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1\ ;\ 6]$. Construire son tableau de variation (les valeurs dans le tableau seront arrondies au dixième).

   b) Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?

5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment faut-il choisir le prix de vente du mètre cube de produit pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices quelle que soit la production choisie dans l'intervalle donné ?

Exercice 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.

   b) Montrer que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		e^2		$+\infty$
Signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

   c) En déduire les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.

4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1+X)(2-X) = 2$.

   c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

<u>Exercice 5</u> *D'après BAC 2014 Nouvelle Calédonie*

On considère la fonction f définie sur $[1;10]$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction f est deux fois dérivable sur $[1;10]$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. a) Déterminer $f'(x)$ sur $[1;10]$.
   b) Construire le tableau de variation de la fonction f sur $[1;10]$.
2. a) Justifier que $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$ sur $[1;10]$.
   b) Étudier le signe de f'' sur $[1;10]$.
   c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. On considère l'algorithme suivant :

INITIALISATION :	X prend la valeur 2
	Y prend la valeur $\dfrac{\ln(2)}{2}$
	Z prend la valeur $\dfrac{\ln(2{,}1)}{2{,}1}$
TRAITEMENT :	Tant que $(Y < Z)$ Faire
	X prend la valeur $X + 0{,}1$
	Y prend la valeur $\dfrac{\ln(X)}{X}$
	Z prend la valeur $\dfrac{\ln(X+0{,}1)}{X+0{,}1}$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher X

   a) Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats sont arrondis au dix millième :

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,3466	0,3533	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	...		

   b) Quelle est la valeur affichée en sortie ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?