Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°5 de mathématiques** **303**

Jeudi 12 janvier 2017 **Durée : 2h30**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Ne pas oublier de faire des phrases de conclusion !

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle composée à 65 % d'hommes. Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications. On admet que ces proportions restent stables.

Partie A: On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note H l'événement :"la personne choisie est un homme", F l'événement :"la personne choisie est une femme", E l'événement :"la personne écoute les explications du démarcheur" et $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) a) Traduire par une phrase d'événement $E \cap F$ et calculer sa probabilité.

b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications est égale à 0,405.

c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme? (O*n donnera le résultat arrondi au centième).*

Partie B: Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait. Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour. On suppose que le fichier est suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné à un jour donné.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

2) Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. O*n arrondira le résultat au millième).*

3) Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins trois souscriptions et moins de 10 souscriptions un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au millième.*

4) Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix-millième.*

Exercice 2 *QCM*

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1) On considère l'univers Ω muni de la probabilité P (on dit que l'on a défini un espace probabilisé $(\Omega; P)$). A et B sont deux événements de Ω. On sait que :

$P(A) = \frac{1}{5}, P_A(B) = \frac{1}{3}$ et $P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3}$.

a) On a : $P_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{6}$ b) On a : $P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$ c) On a : $P(B) = \frac{3}{5}$ d) On a : $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{2}{15}$.

2) On tire successivement et sans remise deux cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un coeur? *On rappelle qu'un jeu de 32 cartes contient 8 coeurs.*

a) $\frac{6}{31}$ b) $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{124}$ d) $\frac{12}{31}$

3) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 dans un repère orthogonal a pour équation:

a) $y = 0{,}368x - 0{,}736$ b) $y = 3e^{-1}x - 3e^{-1}$ c) $y = -2e^{-1}x + 3e^{-1}$

d) $y = e^{-1}x$

4) Soit $A = \frac{(e^{x-1})^2}{e^{2x-3} \times e^{-2-x}}$. Alors on peut écrire :

a) $A = e^{x^2-3x+6}$ b) $A = e^{x^2-x+4}$ c) $A = e^{x+3}$ d) $A = e^{x-7}$

5) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x^2+1}$. Alors :

a) g est croissante sur $\mathbb{R}$ b) g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

c) g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ d) g est décroissante sur $]-\infty; -1]$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0; 10]$ par $(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

Partie A: 1) Montrer que pour tout réel x de $[0; 10]$, on a $f'(x) = (-2x + 7)e^{-x+4}$.

2) En déduire le sens de variations de f et dresser le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.

3) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; 10]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

4) Soit g la fonction définie sur $[0;\ 10]$ par $g(x) = (-2x + 3)e^{-x+4} + 20$. Montrer que pour tout x de $[0;\ 10\ ]$, $g'(x) = f(x)$.

5) Etudier la convexité de g .

Partie B: Une entreprise fabrique entre 0 et 1000 objets par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise , lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 10]$ par $f(x) = (2x - 5)e^{-x+4} + 20$.

Répondre aux questions suivantes en arrondissant les résultats à l'unité:

1) Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum? Quel est le bénéfice maximal en euros?

2) A partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise - t -elle un bénéfice positif?

BONUS !

Montrer que la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a pour tout réel a.

Barème indicatif /20 **Ex 1 :** 8 **Ex 2** : 5 **Ex 3** : 7