Exercice 1

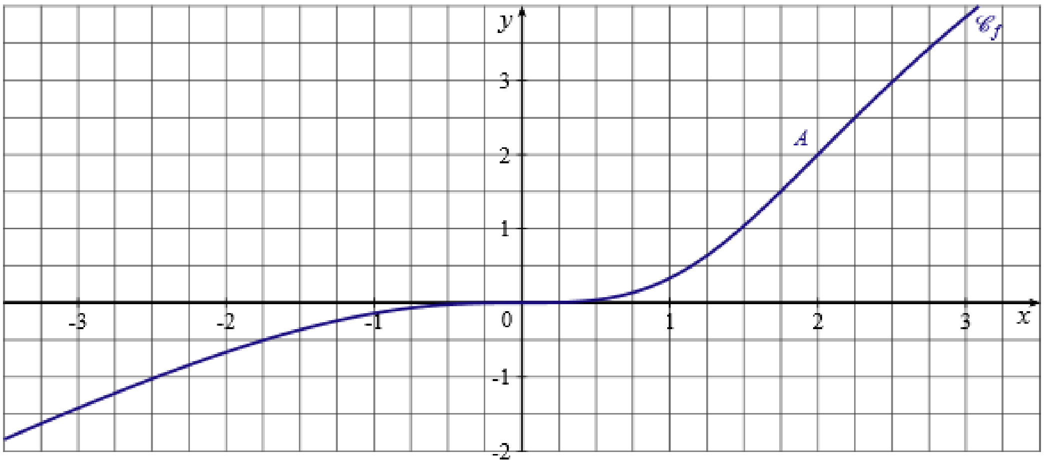
Soit h une fonction définie et continue sur $[0;10]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	0		3		9		10
			7				6
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				4		

Démontrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une solution unique. (on pourra commencer par traiter le cas de l'intervalle $[0;3]$).

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 4}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. On note f' la dérivée de la fonction f.

   a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x^2\left(x^2 - 4x + 12\right)}{\left(x^2 - 2x + 4\right)^2}$.

   b) Étudier les variations de la fonction f.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2.
   Tracer la tangente T dans le repère précédent.

3. La dérivée seconde de la fonction f est définie pour tout réel x par $f''(x) = \dfrac{-48x^2 + 96x}{\left(x^2 - 2x + 4\right)^3}$.

   a) Étudier la convexité de la fonction f.

   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto -x^3 + 3x^2 - 3x - 7$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire le tableau de variations de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]-1;0[$.
3. Déduire des questions qui précèdent que α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = -2$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Dresser, en le justifiant par l'étude précédente, le tableau de signes de $f(x)$.
6. En déduire le tableau de variations de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\dfrac{x^4}{4} + x^3 - \dfrac{3x^2}{2} - 7x + 1$.
7. En quel(s) point(s) la courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente horizontale ?
8. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
9. Conjecturer une solution de $f(x) = 0$. Vérifier la conjecture et montrer qu'il s'agit de la seule solution.

Exercice 4

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?