Lycée militaire de Saint-Cyr **Devoir Libre n°3 de mathématiques** **TES**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés.

A rendre pour le lundi 20 février 2017.

Exercice 1 *Suites et log…*

Pour chaque question, indiquer si les propositions sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

On considère la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3}(u_n)^2$. On admettra que quel que soit $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On considère alors la suite v définie par

$v_n = \ln(\sqrt{3}u_n)$.

(a) La suite v est géométrique.

(b) On a : $v_{10} = 512 \times \ln 3$.

(c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k = (\ln 3)\,(1 - 2^n)$.

Exercice 2

L'énoncé est rédigé de telle sorte que, même sans avoir réussi à démontrer certaines questions, on puisse se servir des résultats, en les admettant, afin de continuer l'exercice

Partie I

On considère les fonctions P et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0; +\infty[$ par :
$P(x) = 3x^3 - x - 2$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$.

① Factoriser $P(x)$ et en déduire que le signe de $P(x)$ est celui de $x - 1$.

② Calculer $g'(x)$ puis l'exprimer en fonction de $P(x)$. En déduire que son signe est celui de $P(x)$.

③ En déduire les variations de g sur son ensemble de définition.

④ En déduire que $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x+1+\dfrac{x-1+\ln(x)}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

① Soit $x \in]0;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et mettre le résultat sous la forme $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^k}$, où k est un entier dont on précisera la valeur.

② En déduire les variations de f sur son ensemble de définition.

③ Déterminer une équation de T_1, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

④ Montrer que $f(x) \geqslant x+1$ lorsque $x \geqslant 1$
et que $f(x) \leqslant x+1$ lorsque $0 < x \leqslant 1$.
En déduire la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x+1$.

⑤ Tracer Δ, T_1, puis l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm (ou 2 grands carreaux), de 0 à 5 en abscisse, de -2 à 6 en ordonnée.