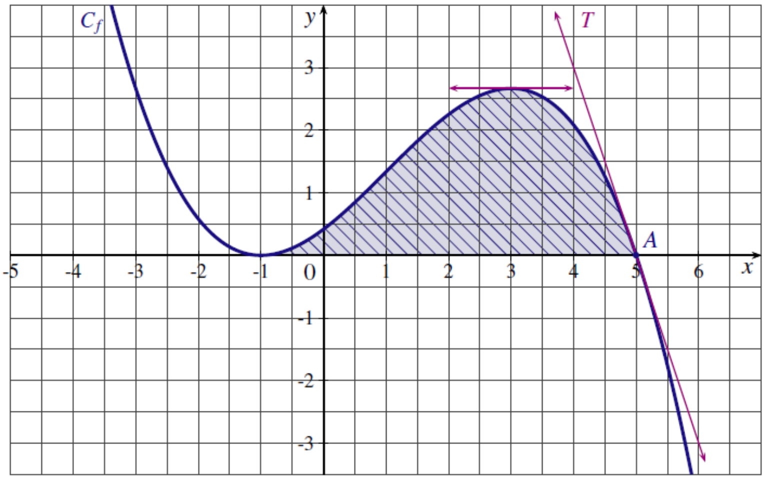
LMSC **Exercices sur l'intégration** **TES**

Exercice 1

Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $G(x)=x-2+\dfrac{1}{x+1}$
Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

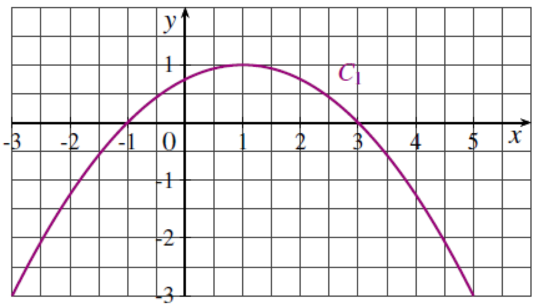
Exercice 2

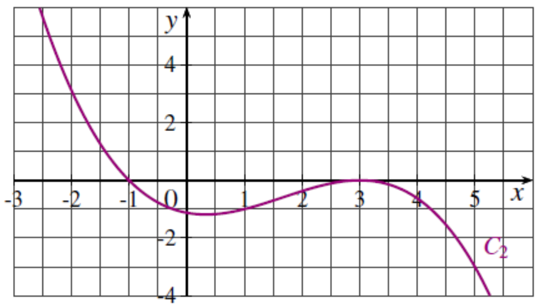
La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4;3)$.
On note f' la dérivée de la fonction fonction f et F une primitive de la fonction fonction f.

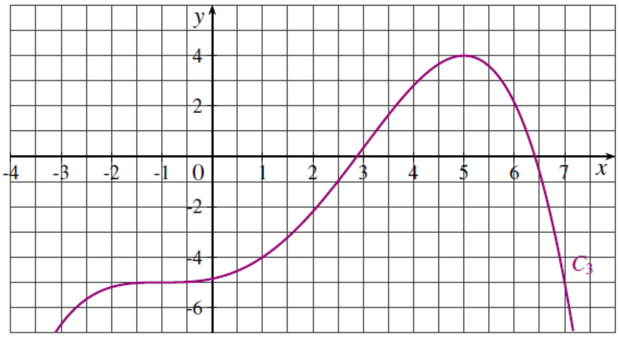


1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F.
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F.

   a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.





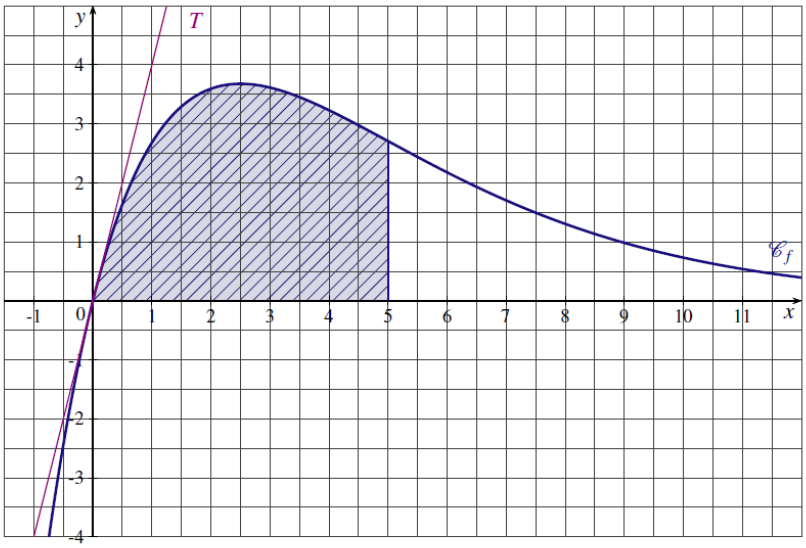


b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.

c) La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 3

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1) \leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12 \leqslant F(5) - F(0) \leqslant 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.

1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.

   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} -0,4a & = & 4 \\ a - 0,4b & = & 0 \end{cases}$

   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.

2. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de A.

Exercice 4 *D'après BAC 2007 Asie*

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère que la fonction f définie sur $[1\,;\,6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. (a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Exercice 5 *D'après BAC 2007 Pondichéry*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
   b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. a) Déterminer une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On pourra remarquer que $f(x) = 5u'(x) \times u(x) + 3$ avec $u(x)$ à préciser.
   b) En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.
3. a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2;4]$.
   b) Donner une interprétation graphique de I.
4. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.
   En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2000 et 4000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

Exercice 6 *D'après BAC 2015 Polynésie*

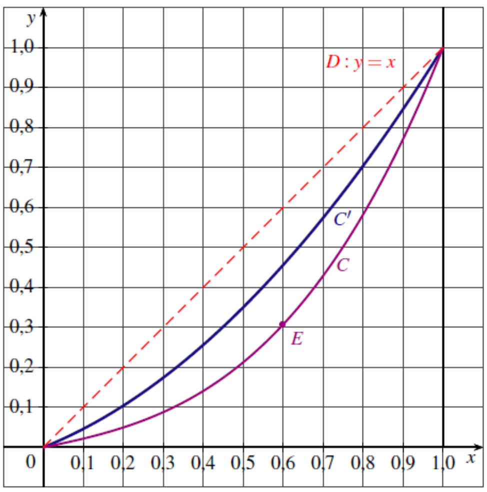
Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0;1]$ par :
$u(x) = 0{,}6x^2 + 0{,}4x$ et
$v(x) = 0{,}7x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}2x$.

On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.
2. Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

   Exemple : pour la courbe C, le point $E(0{,}60;0{,}3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.

   a) Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

   b) Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?

   c) Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?
3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right).$$

   a) Montrer que $c_u = 0{,}2$.

   b) En observant que $\frac{c_v}{2} = \int_0^1 x\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\frac{c_v}{2}$ en termes d'aires.

   c) En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.

   d) Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$.

<u>Exercice 7</u> *Intégration par parties - Pour ceux qui veulent aller plus loin…*

Voici un théorème (*intégration par* parties) qui est très utile face à certaines situations :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt}.$$

Démonstration En effet, la fonction uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a $(uv)' = uv' + u'v$. D'où :
$\int_a^b (uv)'(t)\,dt = \int_a^b (uv' + u'v)(t)\,dt = \int_a^b u(t)v'(t)\,dt + \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$ avec
$\int_a^b (uv)'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b$.

Exemple Calcul de $I = \int_1^e \ln t\,dt$.

Posons $\begin{array}{ll} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}$

D'où, $I = [\mathrm{t}\ln t]_1^e - \int_1^e 1\,dt = e - [t]_1^e = e - e + 1 = 1$.

Applications Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 (1-x)e^{-x}\,dx$
2. $J = \int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$
3. $K = \int_1^2 e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$