EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Les élèves de la série ES ayant choisi la spécialité mathématiques rédigeront l'exercice 5 sur une copie séparée qui sera remise à part.

Les exercices 1 ; 2 et 3 sont communs à tous les candidats. L'exercice 4 diffère selon la spécialité choisie.

Exercice 1 *Commun à tous les candidats- 5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier ***la réponse choisie****. On ne demande pas de justification. Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.*

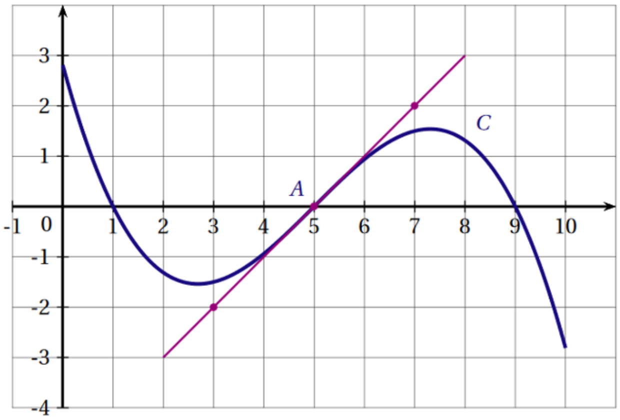
1. L'équation $e^{-0,5x} = 0,5$ admet pour solutions :
   a. $x = 1,38629$ **b**. $x = -1$ **c**. $x = 2\ln 2$ **d**. $x = -\ln 2$

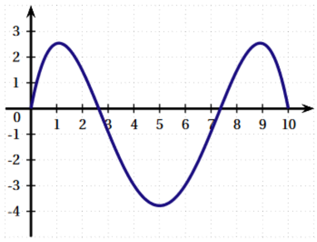
2. Si a et b sont deux réels strictement positifs alors :
   a. $\frac{\ln a}{\ln b} = \ln a - \ln b$ **b**. $2\ln a + \ln b = \ln(2ab)$ **c.** $\ln a - \frac{\ln b}{2} = \ln(\frac{a}{\sqrt{b}})$
   d. $\ln a \times \ln b = \ln(a+b)$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:
   L'équation $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2$ est équivalente à l'équation :
   a.$2x + 3 = 6$ **b**. $2x + 3 = 8$ **c.** $x^2 + 3x = 6$ **d.** $x^2 + 3x = 8$

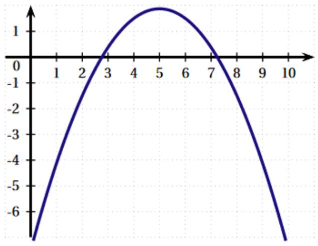
4. On considère la suite de géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = 1,05$. La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par :
   a. $S = 2\times\frac{1-1,05^{13}}{1-1,05}$ **b.** $S = 2\times\frac{1-1,05^{12}}{1-1,05}$ **c.** $S = 1,05\times\frac{1-2^{13}}{1-2}$
   d. $S = 2\times\frac{1-1,05}{1-1,05^{13}}$

5. On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie sur [0 ; 10]. La tangente à la courbe C au point d'abscisse 5 est tracée.
   Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f' de la fonction f.

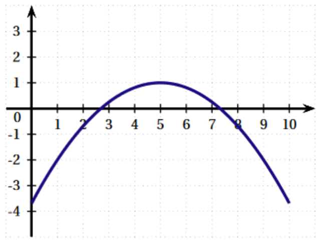




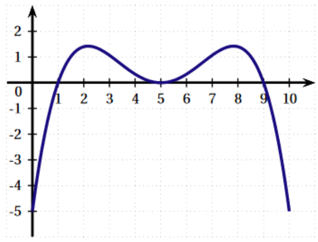
a. Courbe 1



b. Courbe 2



c. Courbe 3

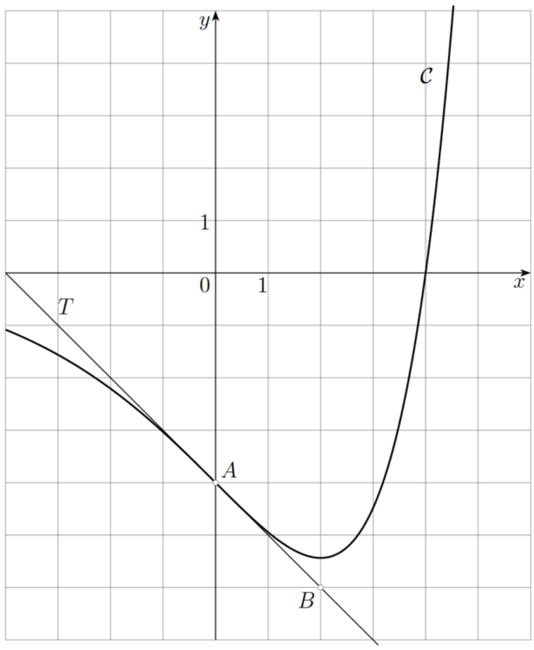


d. Courbe 4

Exercice 2 *Commun à tous les candidats- 5 points*

<u>Partie A</u>

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe C donnée ci-dessous représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
La tangente T à la courbe C au point $A(0\,;\,-4)$ passe le point $B(2\,;-6)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.
   b) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) et justifier que $f'(0) = -1$.
2. a) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel $x, f(x) = (x + a)e^{bx}$.
   Vérifier que pour tout réel $x, f'(x) = (bx + ab + 1)e^{bx}$.
   b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x - 4)e^{0,5x}$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$; en déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
3. a) Calculer la dérivée seconde f'' de f et vérifier que pour tout réel x,
   $f''(x) = 0,25xe^{0,5x}$.
   b) Prouver que le point A est le seul point d'inflexion de la courbe C.
   c) En déduire la position relative de C par rapport à la tangente T.

Exercice 3 *Commun à tous les candidats – 5 points*

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

- 1$^{\text{er}}$ temps : étude du dossier présenté par le candidat ;
- 2$^{\text{ème}}$ temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

- Si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines ;
- Si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

A l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
- 20 % n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
- 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :
   - D l'événement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;
   - R l'événement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

   a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.

   c. Montrer que la probabilité de l'événement $D \cap R$ est égale à 0,24.

d. En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité. Compléter l'arbre pondéré réalisé dans la question a.

2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}38$.
   b. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée. On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins trois personnes et moins de 8 soient recrutées. On donnera une valeur du résultat arrondie à 10^{-3}.
   d. Calculer le nombre moyen de personnes dont le dossier est accepté.

Exercice 4 *Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité* - 5 points

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2012, il a recueilli 110 inscriptions. D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que, d'une année sur l'autre, 90% des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.

On désigne par u_n le nombre d'exposants en $(2012 + n)$ avec n un entier naturel. Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012, soit $u_0 = 110$.

1) Quel est le nombre d'exposants attendus pour 2013?

2) Justifier que , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 30$.

3) Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village, le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220. Recopier et compléter l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.

```
Variables      :   u est un nombre réel
                   n est un nombre entier naturel
Initialisation:    Affecter à u la valeur .....
                   Affecter à n la valeur 2012
Traitement :       Tant que ........
                        Affecter à u la valeur...........
                        Affecter à n la valeur n+1
Sortie:            Afficher .........
```

4) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont vous préciserez la raison et le premier terme.

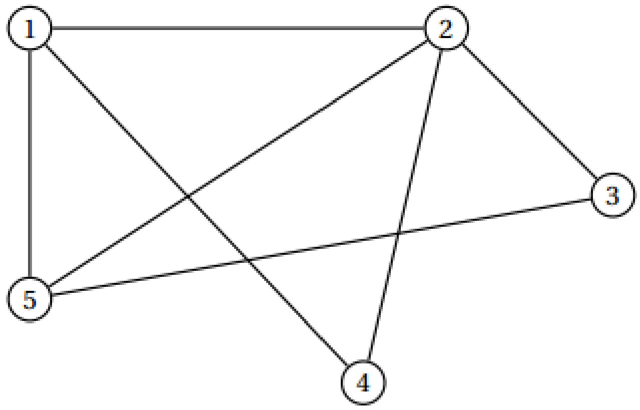
b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -190 \times 0{,}9^n + 300$.

c) Déterminer le résultat recherché par l'algorithme de la question 3 , en résolvant une inéquation.

5) L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de places pour ne jamais refuser d'inscriptions. il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 3000 emplacements. A t-il raison de proposer ce nombre? Justifier.

Exercice 4 *Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité* - 5 points

Un parc de loisirs propose à ses visiteurs des parcours d'accrobranches.
Les différents parcours sont modélisés par le graphe Γ ci-dessous où les sommets correspondent aux cinq arbres marquant leurs extrémités. Chaque parcours est représenté par une arête du graphe et peut être réalisé dans les deux sens.

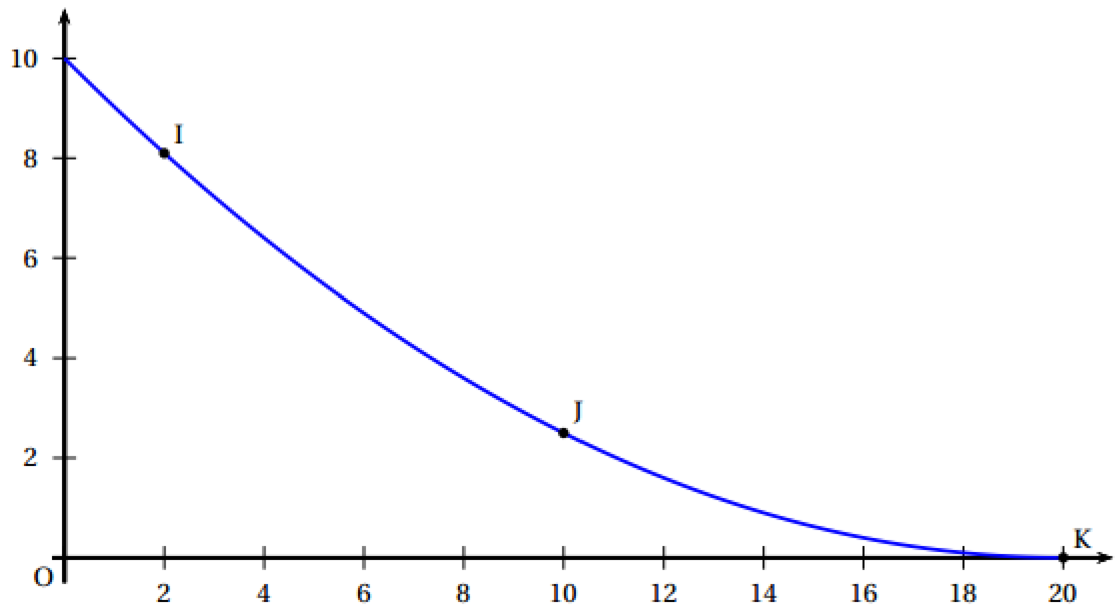


1) L'organisateur du parc de loisirs souhaite que les visiteurs puissent, s'ils le souhaitent, réaliser un itinéraire complet d'accrobranches, c'est-à-dire un itinéraire empruntant une fois et une seule chaque parcours et en commençant cet itinéraire par l'arbre numéro 1.
Justifier que ce souhait est réalisable et proposer un tel itinéraire.
2) On note M la matrice associée au graphe Γ en considérant les sommets pris dans l'ordre croissant des numéros d'arbres.
   a) Ecrire la matrice M.
   b) On donne ci-dessous les matrices M^2 et M^3.*

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

L'organisateur du parc de loisirs souhaite organiser des « itinéraires express »qui débuteront à l'arbre numéro 1, emprunteront trois parcours d'accrobranches et finiront à l'arbre 4. Ces itinéraires peuvent éventuellement emprunter plusieurs fois le même parcours.
Déterminer, en justifiant votre résultat, le nombre « d'itinéraires express » réalisables.
(on ne demande pas de donner ces différents itinéraires).

3) Pour terminer ces « itinéraires express », on installe un toboggan géant sur l'arbre 4.
La forme de ce toboggan est modélisée par une fonction f dont la courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.
Cette courbe passe par les points I,J et K de coordonnées respectives $(2\,;8{,}1)$; $(10\,;2{,}5)$ *et* $(20\,;0)$.
La fonction f est définie sur [0 ;20] par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels.



a) Justifier que a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 400\,a + 20b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 2{,}5 \\ 4a + 2b + c = 8{,}1 \end{cases}$$

b) Déterminer les matrices X et V pour que le système précédent soit équivalent à

$UX = V$ où $U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer a, b et c .