**Lycée militaire de Saint-Cyr** **DS n°7 de mathématiques** **303**

**Jeudi 20 avril 2017** **Durée : 3h00**

*Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.*

## Exercice 1

### Partie A : Etude d'une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}.$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé du plan.
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ et $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$.

**1.** **a.** Montrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

**b.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**2.** On admet que pour tout réel $x$, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe.

**3.** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{x^2-1}\right).$$

**a.** Justifier que l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

**b.** Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

**c.** En remarquant que pour tout réel $x$, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $D$ d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

**4.** Soit $H$ une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h$.

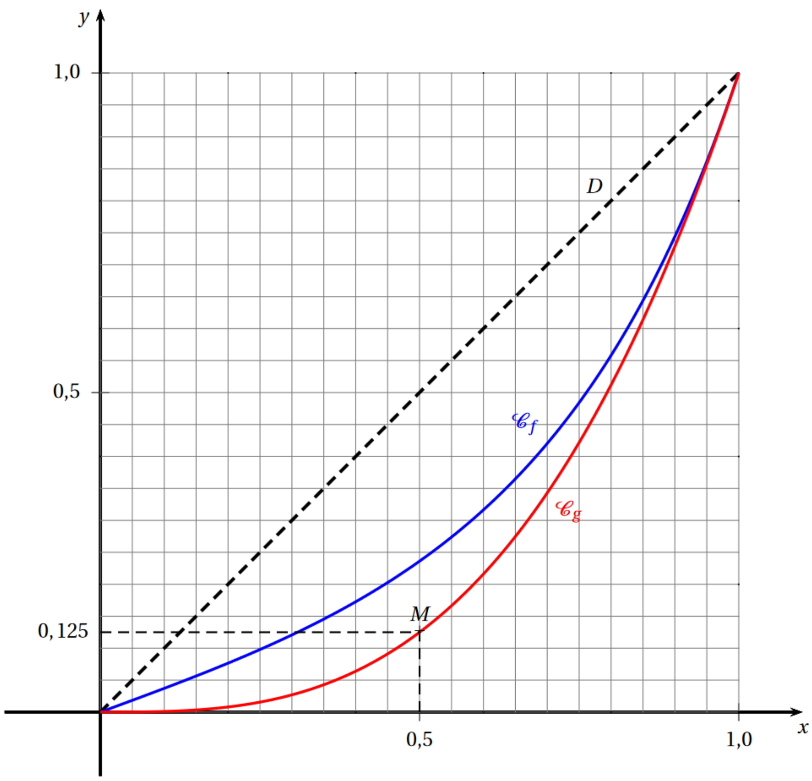
**a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $H(x)$.

**b.** Calculer $I = \int_0^1 h(x)dx$. Donner une valeur exacte.

### Partie B : Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$ ;
- la droite $D$ d'équation $y = x$.




Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

- sur l'axe des abscisses, $x$ représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

*Par exemple :*
*Le point* $M(0,5\ ;\ 0,125)$ *est un point appartenant à la courbe* $\mathscr{C}_g$. *Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante :*
*si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des* 50 % *aux revenus les plus faibles) représente* 12,5 % *de la masse salariale.*

**1.** Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.

**2.** On note $\mathscr{A}_f$ l'aire du domaine délimité par la droite $D$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On appelle indice de Gini associé à la fonction $f$, le nombre réel noté $I_f$ et défini par $I_f = 2 \times \mathscr{A}_f$.

**a.** Montrer que $I_f = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**b.** On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

## Exercice 2

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en $\text{mg.l}^{-1}$ (milligramme par litre), doit être comprise entre $140\ \text{mg.l}^{-1}$ et $180\ \text{mg.l}^{-1}$.

Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de $160\ \text{mg.l}^{-1}$.

On estime que la concentration du produit baisse d'environ $10\,\%$ par semaine.

Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.

Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

- la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;
- la quantité de produit consommée soit minimale.

### Partie A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de $10\ \text{mg.l}^{-1}$.

On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite $(C_n)$, le terme $C_n$ en donnant une estimation de la concentration du produit, en $\text{mg.l}^{-1}$, au début de la $n$-ième semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, $C_{n+1} = 0,9 \times C_n + 10$.
2. Soit la suite $(V_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $V_n = C_n - 100$.
   a) Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $0,9$ et que $V_0 = 60$.
   b) Exprimer $V_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $C_n = 0,9^n \times 60 + 100$.
3. a) Déterminer la limite de la suite $(C_n)$ quand $n$ tend vers l'infini. Justifier la réponse.
   Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
   b) Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à $140\ \text{mg.l}^{-1}$ ?
4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

### Partie B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de $12\ \text{mg.l}^{-1}$.

Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?

**Exercice 3** **VRAI - FAUX**

*Pour chacune des cinq propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou si elle est fausse, et justifier la réponse. Il est attribuée un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

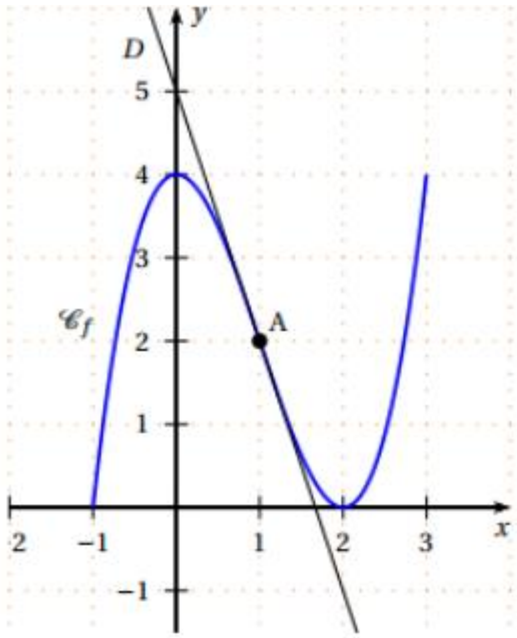
**Proposition 1:** Pour $x < 0$, le nombre réel $\ln(-\frac{1}{x})$ est égal à : $-lnx$ .

On considère dans la suite de cet exercice une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-1; 3]$ , deux fois dérivable sur cet intervalle et dont la représentation $C_f$ dans un repère orthonormé est proposée ci-contre.

On désigne par $f'$ la dérivée de $f$ , par $f''$ la dérivée seconde de $f$ et par F une primitive de $f$.

La droite D est tangente à $C_f$ au point d'abscisse 1 , seul point en lequel la courbe traverse la tangente.

L'axe des abscisses est tangent à $C_f$ au point d'abscisse 2 et la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation : $y = 4$.




**Proposition 2:** $\int_{-1}^{0} f(x)dx < 0.$

**Proposition 3:** $F(1) > F(2)$

**Proposition 4:** $f'(1) = 3$

**Proposition 5:** $f$ est concave sur $[1; 3]$.

**Exercice 4**

L'opérateur téléphonique Boomtel propose à ses abonnés deux types d'accès internet à haut-débit:

- un accès internet sur ligne fixe
- un accès 3G sur téléphone portable.

Aujourd'hui, l'entreprise fait les constats suivants sur les accès internet à haut débit de ses abonnés :

- 58% des abonnés ont un accès internet sur ligne fixe. Parmi ceux-là, 24% ont également un accès 3G sur téléphone portable;
- parmi les abonnés qui n'ont pas d'accès internet sur ligne fixe, 13 % ont un accès 3G sur téléphone portable.

Pour une enquête de satisfaction, la fiche d'un abonné est prélevée au hasard.
Dans cet exercice, on note:

- F l'événement: "la fiche est celle d'un abonné qui a un accès internet sur ligne fixe."
- G l'événement :"la fiche est celle d'un abonné qui a un accès 3G sur téléphone portable".

1) En utilisant les données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(F)$; $p_F(G)$ ; $p_{\bar{F}}(G)$.
2) Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
3) Calculer $p(F \cap \bar{G})$. Interpréter ce résultat;
4) a) vérifier que la probabilité que la fiche prélevée soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable est de $0{,}8062$.
b) Peut-on affirmer qu'au moins 25% des abonnés ont un accès 3G sur téléphone portable?
5) On prélève successivement les fiches de trois abonnés. On admet que le nombre de fiches est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler le tirage à un tirage avec remise.
Calculer la probabilité qu'exactement une des fiches tirées soit celle d'un abonné qui n'a pas d'accès 3G sur téléphone portable.

**BONUS !**

1. Calculer $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$
2. Encadrer $\int_e^{2e} \frac{x}{\ln x} dx$

**Barème /20** **Ex 1 :** 5 **Ex 2** : 5 **Ex 3** : 5 **Ex 4 :** 5