LMSC **Corrigé du DS n°7**

Exercice 1

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2-1}.$$

1. a. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'après la formule de dérivation d'un produit :
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x^2-1} + x \times \left(2x\mathrm{e}^{x^2-1}\right) = \left(2x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.

   b. Pour tout réel x, $2x^2+1 > 0$ et $\mathrm{e}^{x^2-1} > 0$ donc $f'(x) > 0$; la fonction f est donc strictement croissante dur $\mathbb{R}$.

2. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
La fonction f est convexe sur les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels sa dérivée f' est croissante, autrement dit quand sa dérivée seconde f'' est positive.
$f''(x) > 0 \iff 2x\left(2x^2+3\right)\mathrm{e}^{x^2-1} > 0 \iff x > 0$ car, pour tout x, $2x^2+3 > 0$ et $\mathrm{e}^{x^2-1} > 0$.
La fonction f est donc convexe sur $]0\,;+\infty[$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{x^2-1}\right)$.

   a. On résout l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$:
$$\begin{aligned} 1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0 &\iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{x^2-1} \\ &\iff \ln 1 \geqslant x^2-1 \qquad \text{(la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\iff 0 \geqslant (x-1)(x+1) \\ &\iff -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$
L'ensemble solution de l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ est donc l'intervalle $[-1\,;1]$.

   b. Sur l'intervalle $[-1\,;1]$, $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ donc $h(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{x^2-1}\right)$ a le signe de x sur $[-1\,;-1]$:
$h(x) < 0$ sur $]-1\,;0[$ et $h(x) > 0$ sur $]0\,;1[$; de plus $h(-1) = h(0) = h(1) = 0$.

   c. $h(x) = x - f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$, donc sur cet intervalle la droite D d'équation $y = x$ est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right)$ et soit $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.
On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Comme h est une primitive de h, $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = H(1) - H(0) = 0 - \left(-\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}\right) = \frac{1}{2\mathrm{e}}$

Partie B : Applications

1. Le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F est donné par $f(0{,}8) \approx 0{,}558$; il est donc à peu près de 56 %.

2. On note $\mathscr{A}_f$ l'aire du domaine délimité par la droite D, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On appelle indice de Gini associé à la fonction f, le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times \mathscr{A}_f$.

a. D'après le cours et ce qui a été vu dans les questions précédentes :
$\mathscr{A}_f = \displaystyle\int_0^1 \left(x - f(x)\right)\mathrm{d}x = I = \frac{1}{2\mathrm{e}}$; donc $I_f = 2 \times \mathscr{A}_f = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b. *On peut répondre à cette question par des considérations géométriques ou analytiques.*

- Sur $[0;1]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est entièrement située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$; donc l'aire comprise entre la droite D, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est plus petite que l'aire comprise entre la droite D, la courbe $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Ce qui entraine que $I_f < I_g$.
- On peut calculer I_g :
  $I_g = 2\int_0^1 (x-g(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x-x^3)\,\mathrm{d}x = 2\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

On peut donc dire que l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire est l'entreprise F.

Exercice 2

Partie A

1. Toutes les semaines, la concentration baisse de 10 %, soit : $C_n \times \left(1-\dfrac{1}{100}\right)$ mg.l^{-1}.
   De plus, chaque semaine le distributeur automatique déverse : 10 mg.l^{-1}, soit $C_n \times 0,9+10$.
   Au final, d'une semaine à l'autre, la concentration vaudra : $C_{n+1}=0,9C_n+10$.
2. a) On a :
   $$\begin{array}{rcl} V_{n+1} &=& C_{n+1}-100 \\ &=& 0,9C_n+10-100 \\ &=& 0,9C_n-90 \\ &=& 0,9(C_n-100) \\ &=& 0,9Vn \end{array}$$
   (V_n) est bien géométrique de raison $q=0,9$.

   b) Le terme général de (V_n) de premier terme $V_0=C_0-100=160-100=60$, vaut :
   $$V_n = V_0\times q^n.$$
   Ainsi :
   $$V_n = 60\times 0,9^n.$$

   c) Comme $V_n = C_n-100 \Leftrightarrow C_n+V_n+100$.
   Nous en déduisons que :
   $$C_n = 0,9^n\times 60+100$$
3. a) $C_n = a_n\times b_n + c_n$ avec :
   - $a_n = 0,9^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0^+$, car a_n est de la forme q^n avec $q\in\,]0\,;\,1[$
   - $b_n=60$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 60$
   - $c_n=100$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 100$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 100$
   La concentration tendra donc vers 100 mg.l^{-1}.

b) Ici, on résout :
$$\begin{array}{rcll} C_n<140 &\Leftrightarrow& 0,9^n\times 60+100<140 & \\ &\Leftrightarrow& 0,9^n\times 60<40 & \\ &\Leftrightarrow& 0,9^n<\dfrac{2}{3} & \\ &\Leftrightarrow& \ln(0,9^n)<\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) & \text{(en effet : } a\leqslant b\Leftrightarrow \ln a\leqslant \ln b) \\ &\Leftrightarrow& n\ln(0,9)w\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) & \\ &\Leftrightarrow& n>\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\div\ln(0,9) & \text{(en effet : } \ln 0,9<0) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geqslant 4 \qquad\qquad \left(\text{en effet : } \ln\left(\frac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) \approx 3,848\right)$$

Au bout de la quatrième semaine, la concentration sera inférieure ou égale à 140 mg.l^{-1}.

4. Non, la concentration sera inférieure à 140 mg.l^{-1} au bout de 4 semaines, la concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 160 mg.l^{-1} et elle doit se conformer à cela pendant une duére de six semaines au moins.

Partie B

Ici (C_n) est la suite définie par la relation de récurrence suivante : $C_{n+1} = C_n \times 0,9 + 12$, avec $C_0 = 160$.
En calculant les premiers termes, on obtient :

$C_1 = 156$, $C_2 = 152,4$, $C_3 = 149,16$, $C_4 = 146,244$, $C_5 = 143,6196$, $C_6 = 141,25764$ et $C_7 = 139,131876$.

Au bout de 7 semaines, la concentration sera à nouveau inférieure à 140 mg.l^{-1}, mais elle doit se conformer à cela pendant une durée de 6 semaines au moins. Nous sommes donc tout juste bon.

Exercice 3

Toutes les propositions sont fausses.