Exercice 1 *Des questions indépendantes*

① Calculer $\displaystyle\int_0^n e^{-x}dx$. On note $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-x}dx$. Évaluer cette limite.

② Déterminer la primitive F de $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2-\dfrac{x}{2}+1$ qui vérifie $F(1)=0$.

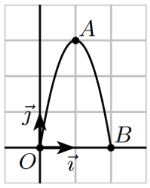
③ Calculer la valeur moyenne de la fonction $x\mapsto x^3$ sur l'intervalle $[-m,m]$, où $m>0$.

④ Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\displaystyle\int_4^4 g(x)dx$.

⑤ Soit $u :]-1;+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto 3x^2e^{x^3+1}$. Déterminer une primitive U de u sur $]-1;+\infty[$.
En déduire une primitive de $v :]-1;+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2e^{x^3+1}$.

⑥ Soit p et q deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=x^2+x+2$ et $q(x)=x+3$.
On note $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_q$ leurs courbes respectives dans un repère orthonormé.
Étudier la postion relative des deux courbes.
Calculer l'aire de la surface située entre les deux courbes et délimitée en abscisse par $-1\leqslant x\leqslant 1$.

⑦ La courbe ci-contre représente une fonction w définie sur $[0,2]$.
Calculer l'aire en cm^2 du triangle OAB.
Expliquer pourquoi $3\leqslant\displaystyle\int_0^2 w(x)dx\leqslant 6$.



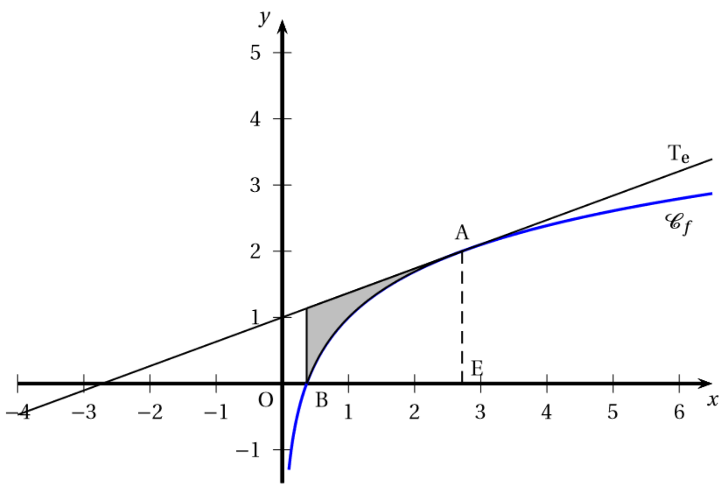
⑧ Soit f une fonction continue et croissante sur $[0;1]$ telle que $f(0)=2$.
Soit F la primitive de f qui s'annule en 0.
Déterminer les variations et la convexité de F. En déduire : $F(x)\geqslant 2x$ pour tout $x\in[0;1]$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=1+\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A(e ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses. Le point E a pour coordonnées (e ; 0).
On admettra que sur $]0\,;\,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.



1. **a.** Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
   Calculer les coordonnées du point B.

   b. Démontrer que, pour $x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $f(x) \geqslant 0$.

2. **a.** Déterminer une équation de $\mathrm{T_e}$.

   b. En déduire les coordonnées du point C.

   c. Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} (1+\ln x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter ce nombre.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*

   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, $\mathrm{T_e}$ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.