<u>Exercice 1</u> *Des questions indépendantes*

① Calculer $\int_0^n e^{-x}dx$. On note $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-x}dx$. Évaluer cette limite.

② Déterminer la primitive F de $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - \frac{x}{2} + 1$ qui vérifie $F(1) = 0$.

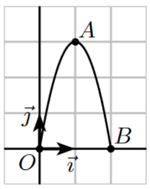
③ Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[-m, m]$, où $m > 0$.

④ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\int_4^4 g(x)dx$.

⑤ Soit $u :]-1; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2e^{x^3+1}$. Déterminer une primitive U de u sur $]-1; +\infty[$.
En déduire une primitive de $v :]-1; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2e^{x^3+1}$.

⑥ Soit p et q deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 + x + 2$ et $q(x) = x + 3$.
On note $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_q$ leurs courbes respectives dans un repère orthonormé.
Étudier la postion relative des deux courbes.
Calculer l'aire de la surface située entre les deux courbes et délimitée en abscisse par $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

⑦ La courbe ci-contre représente une fonction w définie sur $[0, 2]$.
Calculer l'aire en cm^2 du triangle OAB.
Expliquer pourquoi $3 \leqslant \int_0^2 w(x)dx \leqslant 6$.



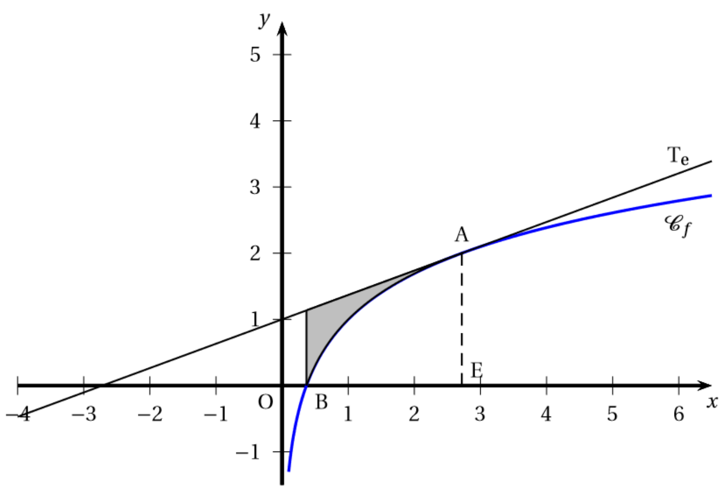
⑧ Soit f une fonction continue et croissante sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = 2$.
Soit F la primitive de f qui s'annule en 0.
Déterminer les variations et la convexité de F. En déduire : $F(x) \geqslant 2x$ pour tout $x \in [0; 1]$.

<u>Exercice 2</u>

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
Le point A$(e\,;2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
Le point C est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses. Le point E a pour coordonnées $(e\,;0)$.
On admettra que sur $]0\,;\,+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.



1. **a.** Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.
   Calculer les coordonnées du point B.

   b. Démontrer que, pour $x \geqslant \dfrac{1}{\text{e}}$, $f(x) \geqslant 0$.

2. **a.** Déterminer une équation de T_{e}.

   b. En déduire les coordonnées du point C.

   c. Vérifier que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

   On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{\text{e}}}^{\text{e}} (1+\ln x)\,\text{d}x$. Interpréter ce nombre.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}_f$, T_{e} et les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par B et E. Ce domaine est grisé sur le graphique. Donner une valeur approchée arrondie au millième de cette aire.