Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°8 de mathématiques** **303**

Jeudi 18 mai 2017 **Durée : 3h00**

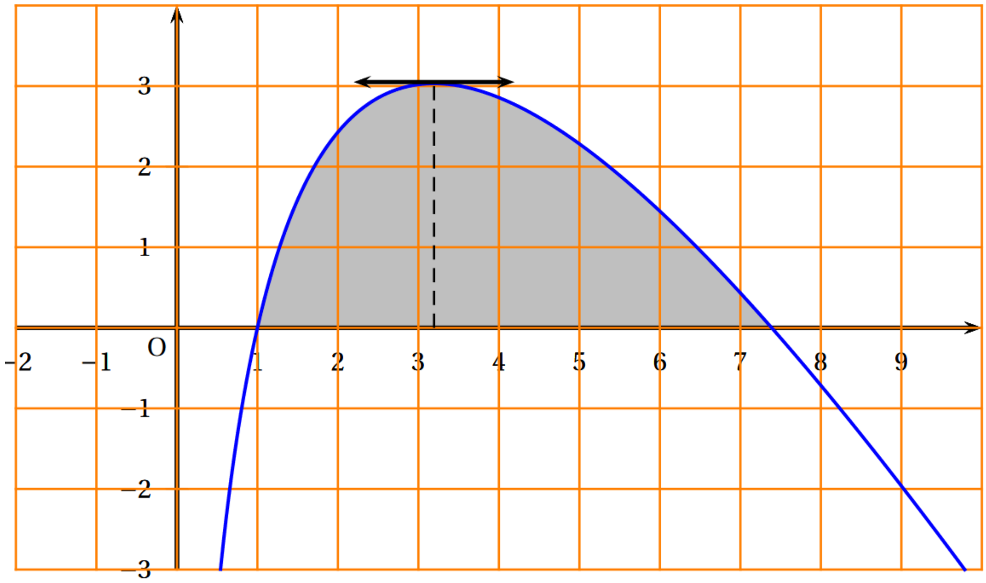
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation des copies. Tous les résultats devront être soulignés.

<u>Exercice 1</u>

Dans une entreprise, on a modélisé le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de x centaines d'appareils par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + \left(e^2 - 1\right)\ln x + 2.$$

La courbe de la fonction f est donnée sur la figure ci-dessous :



1. Vérifier par le calcul que $f(1) = 0$ et $f\left(e^2\right) = 0$.
2. À l'aide du graphique, déterminer approximativement :
   a. le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice ;
   b. les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul,
3. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.
   c. En déduire le nombre d'appareils vendus par cette entreprise quand elle réalise le bénéfice maximal (le résultat sera arrondi à l'unité).

4. Parmi les courbes données en annexe, une seule correspond à celle d'une primitive de f. Déterminer la courbe qui convient, en expliquant votre choix (on pourra s'appuyer sur le signe de $f(x)$).
5. En utilisant le résultat de la question précédente, en déduire, par une lecture graphique, une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré dans la figure ci-dessus.
6. **a.** Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = -x^2 + \left(3 - \mathrm{e}^2\right)x + \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)x\ln x \text{ est une primitive de } f.$$

   b. Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise sur l'intervalle où ce bénéfice est positif ou nul.

<u>Exercice 2</u> *QCM*

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier la proposition qui vous semble exacte sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.
Barème : *Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

1. L'intégrale $\int_0^1 3x^2e^{x^2}\,dx$ est égale à :

   A. $6(e-1)$ **B.** $\frac{3}{2}(e-1)$ **C.** $\frac{3}{2}e$

2. Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) - \ln(a^2) + \ln(\frac{1}{b^2})$ est égal à :

   A. $-\ln(ab)$ **B.** $\ln(\frac{a}{b})$ **C.** $-\ln\left(\frac{1}{ab}\right)$

3. Soit la fonction h définie pour $x < -\frac{1}{3}$ par $h(x) = 9 + \ln(\frac{3x+1}{x-2})$.

   Parmi les expressions suivantes de $h(x)$, l'une d'elles est fausse, laquelle ?

   A. $h(x) = 9 + \ln(3x+1) - \ln(x-2)$

   B. $h(x) = 9 + \ln(3 + \frac{7}{x-2})$

   C. $h(x) = 9 - \ln(\frac{x-2}{3x+1})$

4. Une expérience aléatoire a trois issues possibles : 2 ;3 et a (où a est un réel).

   On sait que $p(2) = \frac{1}{2}\ p(3) = \frac{1}{3}\ et\ p(a) = \frac{1}{6}$.

   On sait de plus que l'espérance mathématique associée est nulle. On a donc :

   A. $a = -12$ **B.** $a = -6$ **C.** $a = -5$

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+1}{\ln(e^{x^2}-1)}$. La fonction f est définie sur :

   A. $\mathbb{R}$ **B.** $\mathbb{R} - \{0\}$ **C.** $]0;+\infty[$

Exercice 3

Exercice 4

BONUS !

Barème probable /20 **Ex 1 :** 6 **Ex 2** : 5 **Ex 3** : 5 **Ex 4 :** 4

ANNEXE - ***Courbes de l'exercice 4***