Exercice 1

1. • $f(1) = -2\times 1 + (e^2-1)\ln 1 + 2 = -2+0+2 = 0$.
   • $f(e^2) = -2\times e^2 + (e^2-1)\ln(e^2) + 2 = -2e^2 + (e^2-1)\times 2 + 2 = -2e^2 + 2e^2 - 2 + 2 = 0$.
2. À l'aide du graphique, déterminer approximativement :
   a. On lit approximativement que le bénéfice maximum 3 000 €est obtenu pour la vente de 320 appareils.
   b. On lit que le bénéfice est positif quand la vente va de 100 à 740 appareils.
3. **a.** Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -2 + (e^2-1)\times\dfrac{1}{x} : \dfrac{-2x+e^2-1}{x}$.
   b. Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $-2x+e^2-1$:
   • $f'(x) > 0 \iff -2x+e^2-1 > 0 \iff 2x < e^2-1 \iff x < \dfrac{e^2-1}{2}$: sur $\left]0\,;\,\frac{e^2-1}{2}\right[$ la fonction est strictement croissante ;
   • $f'(x) < 0 \iff -2x+e^2-1 < 0 \iff 2x > e^2-1 \iff x > \dfrac{e^2-1}{2}$: sur $\left]\frac{e^2-1}{2}\,;\,+\infty\right[$ la fonction est strictement décroissante.
   • $f'(x) = 0 \iff x = \dfrac{e^2-1}{2}$ en ce point la fonction a un maximum $f\left(\frac{e^2-1}{2}\right)$.
   c. D'après la question précédente le bénéfice est maximal pour $x = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}194$ soit environ 319 appareils vendus.
4. Si F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$, alors $F'(x) = f(x)$: le signe de f est donc celui de F'.
   Donc F_1 est à éliminer car sur $[1\,;\,2]$ f est positive et F est décroissante, donc $F'(x) < 0$;
   Même chose pour F_3 : sur $[6\,;\,7]$, $f(x) > 0$ et $F'(x) < 0$.
   Il reste donc F_2.
5. En utilisant la primitive F_2, on a donc :
   $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,dx = F_2(x)]_1^{e^2} = F(e^2) - F(1) \approx 9{,}3 - (-3{,}3) \approx 12{,}6$ unités d'aire
6. **a.** F est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $F'(x) = -2x + 3 - e^2 + (e^2-1)\ln x + (e^2-1)\,x\times\dfrac{1}{x} = -2x + 3 - e^2 + (e^2-1)\ln x + e^2 - 1 = -2x + 2 + (e^2-1)\ln x = f(x)$, donc F est bien une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Rem : On peut donc vérifier la question précédente :
   $F(e^2) - F(1) = -(e^2)^2 + (3-e^2)\times e^2 + (e^2-1)\,e^2\ln e^2 - [-1^2 + (3-e^2) + (e^2-1)\,1\ln 1] = -e^4 + 3e^2 - e^4 + 2e^4 - 2 + 1 - 3 + e^2 = 2e^2 - 2 \approx 12{,}78$ unités d'aire.
   b. La valeur moyenne du bénéfice sur intervalle $[1\,;\,e^2]$ est égal à :
   $m = \dfrac{1}{e^2-1}\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,dx = \dfrac{1}{e^2-1}[F(x)]_1^{e^2} = \dfrac{1}{e^2-1}(2e^2-2) = \dfrac{2(e^2-1)}{e^2-1} = 2$ soit 2 000 €.

Exercice 2

1. **B**
2. **A**
3. **A**
4. **A**
5. **C**

Exercice 3

1. Première méthode :

On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40000$.

a. $G_{n+1} = M_{n+1} + 40000 = 1{,}0225\,M_n + 900 + 40000$;
or $G_n = M_n + 40000$ donc $M_n = G_n - 40000$.

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= 1{,}0225\,(G_n - 40000) + 900 + 40000 \\ &= 1{,}0225\,G_n - 1{,}0225 \times 40000 + 40900 \\ &= 1{,}0225\,G_n - 40900 + 40900 = 1{,}0225\,G_n \end{aligned}$$

$G_0 = M_0 + 40000 = 6000 + 40000 = 46000$

Donc la suite (G_n) est géométrique de premier terme $G_0 = 46000$ et de raison 1,0255.

b. D'après le cours, comme la suite (G_n) est géométrique de premier terme $G_0 = 46000$ et de raison 1,0255, on peut dire que $G_n = 46000 \times 1{,}0225^n$.
Donc $M_n = 46000 \times 1{,}0225^n - 40000$.

c. On cherche n entier tel que $M_n \geqslant 19125$.

$$\begin{aligned} M_n \geqslant 19125 &\iff 46000 \times 1{,}0225^n - 40000 \geqslant 19125 \\ &\iff 46000 \times 1{,}0225^n \geqslant 59125 \iff 1{,}0225^n \geqslant \frac{59125}{46000} \\ &\iff \ln\left(1{,}0225^n\right) \geqslant \ln \frac{59125}{46000} \iff n \times \ln(1{,}0225) \geqslant \ln \frac{59125}{46000} \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln \frac{59125}{46000}}{\ln(1{,}0225)} \text{ car } \ln(1{,}0225) > 0 \\ &\iff n \geqslant 11{,}28 \end{aligned}$$

Le plafond de 19 125 € est atteint la douzième année.

2. Deuxième méthode :

a. On modifie la ligne 4 de l'algorithme fourni dans le texte ainsi
« Affecter à MONTANT la valeur 5 000 »
pour changer la valeur de départ.
On modifie la ligne 8 ainsi
« Affecter à MONTANT la valeur 1,0225 × MONTANT + 1000 »
pour changer la somme que l'on ajoute chaque année.

b. Pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année, il faut rajouter à l'intérieur de la boucle TANT QUE, en ligne 10 :
« Afficher MONTANT »

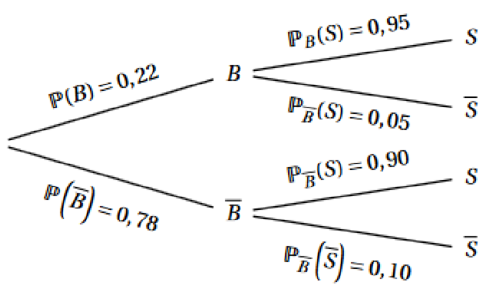
Exercice 4

Partie A

1. Dans un premier temps :

- $\mathbb{P}(\overline{S}) = 1 - \mathbb{P}(S)$.
- $\mathbb{P}_{\overline{B}}(S) = 1 - \mathbb{P}_B(S) = 0,05$
- $\overline{S} = 1 - \mathbb{P}_{\overline{B}}(S) = 0,10$

Voici l'arbre de probabilité :



2. Ici, nous calculons : $\mathbb{P}(S \cap B) = \mathbb{P}_B(S) \times \mathbb{P}(B) = 0,95 \times 0,22 = 0,209$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(S) & = & \mathbb{P}(S \cap B) + \mathbb{P}\left(S \cap \overline{B}\right) \\ & = & 0,209 + \mathbb{P}_{\overline{B}}(S) \times \mathbb{P}\left(\overline{B}\right) \\ & = & 0,209 + 0,90 \times 0,78 \\ & = & 0,209 + 0,702 \\ & = & 0,911 \end{array}$$

4. Ici on calcule : $\mathbb{P}_S\left(\overline{B}\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(S \cap \overline{B}\right)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{0,702}{0,911} \approx 0,771$.

Partie B

X suit la loi normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 300$ et $\sigma = 2$.

1. On calcule ici : $\mathbb{P}(300 - 4 \leqslant X \leqslant 300 + 4) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$. C'est un résultat de cours.

2. Pour cela, on utilise sa calculatrice, en utilisant la fonction : FracNormale$(0.01, \mu, \sigma)$ ou invNorm$(0.01, \mu, \sigma)$.
   On trouve : $a \approx 295$ g.

Partie C

Nous avons $p = 0,9$ et :

- $n = 130$ et $n \geqslant 30$.
- $n \times p = 130 \times 0,9 = 117 \geqslant 5$.
- $n \times (1-p) = 130 \times (1 - 0,9) = 13 \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotiques des fréquences au seuil de 95 % vaut :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On trouve :

$$I = [0,848\ ;\ 0,952].$$

La fréquence observée vaut : $f = \dfrac{115}{130} \approx 0,8846 \approx 0,885$. Donc $f \in I$, on ne peut pas remettre l'affirmation du directeur commercial en cause. La fréquence appartient à cet intervalle avec une probabilité de 0,95.

Bonus

12. Réponse **D.** $b = a + 4$ donc $b > a$ et $b > 4$ (puisque $a > 0$).
$d = 2b - 4 = b + (b - 4)$ et puisque $b > 4$, $d > b$. D'où $d > b > a$.
$d = 4c$ (avec $c \geqslant 1$) donc $d > c$.
Le plus grand des quatre entiers est d.
(On peut avoir, par exemple, $a = 4$, $b = 8$, $c = 3$, $d = 12$.)