Exercice 1

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{e^{0,5x}}{2} dx$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \frac{e^{0,5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1,2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

Exercice 2

On s'intéresse à la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1. a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.

   b) Trouver un nombre réel $a > 1$ tel que $\int_1^a \ln x dx = 1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;a]$.
2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1;a]$.

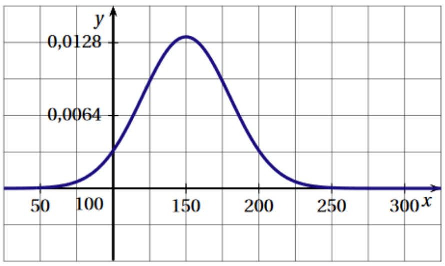
   a) Calculer $p(X \leqslant 2)$.

   b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

Exercice 3 *D'après BAC 2013 Polynésie*

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1



On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.

1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
   On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.
   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

B. Étude de la zone 2

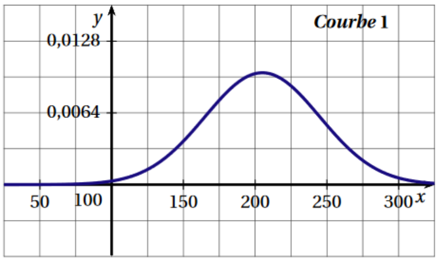
1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.

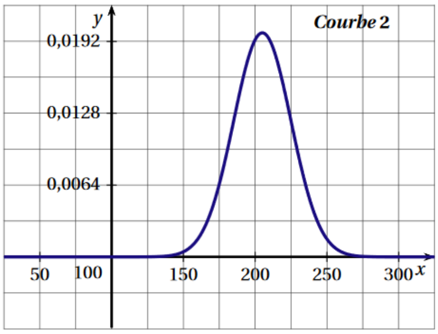
   a. Calculer la fréquence f de poissons malades dans l'échantillon.

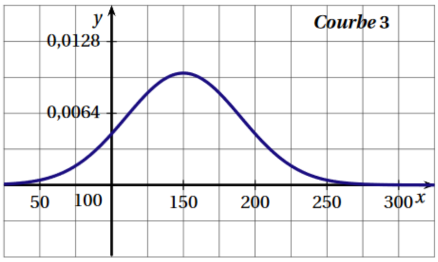
   b. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la proportion p de poissons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.

2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.

En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse./indexLectures graphiques







Exercice 4 *D'après BAC 2013 Centres-Etrangers*

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Paul se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\ ;\ 120]$.

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120,\ 400)$.

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.

b. Montrer l'équivalence :

$$90 < J < 180 \Leftrightarrow -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$$

c. On définit la variable aléatoire X par $X = \dfrac{J-120}{20}$.

Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

<u>Exercice 5</u> *La loi de Pareto*

Un peu d'histoire…

L'économiste Italien Vilfredo Pareto (1848-1923) observa au début du XX ème siècle que 20 % de la population italienne possédait 80 % de la richesse nationale. Cette observation, connue sous le nom de loi 80-20, fut généralisée plus tard par Joseph Juran.

1. Une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètre k sur un intervalle $[m\,;+\infty[$, où m est un nombre réel strictement positif, si sa densité de probabilité f_k est définie sur $[m;+\infty[$ par : $f_k(x) = \frac{km^k}{x^{k+1}}$.
   a) Pour tout nombre réel t supérieur à m, exprimer en fonction de m et de k, $F_k(t) = P(X < t)$.
   b) En prenant $m = 1$, représenter sur un même graphique les fonctions F_1, F_2 et F_3.
   c) Pour un nombre réel t supérieur à m, quelle semble être la tendance de $F_k(t)$ quand t augmente ?
2. X est une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto sur $[1;+\infty[$ de paramètre $k = 3$.
   On admet que l'espérance de X est $\mu = \frac{k}{k-1}$ et que sa variance est $\sigma^2 = \frac{k}{(k-1)^2(k-2)}$.
   On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de même variance que X.
   On admet que sa densité de probabilité est la fonction f définie par :
   $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
   a) A l'aide de la calculatrice, représenter les densités de probabilité de X et Y sur un même graphique.
   b) Trouver graphiquement une valeur approchée au dixième de l'abscisse a du point d'intersection des deux courbes de plus petite ordonnée.
   c) Calculer des valeurs approchées de $P(X > a)$ et $P(Y > a)$.
   d) Calculer $P(X > 5)$ et $P(Y > 5)$.
   e) On dit en anglais que la loi de Pareto est heavy-tailed (« à queue longue »). Expliquer pourquoi ?