Corrigé du livret de révisions

I Suites

Exercice 1

1. Accroissement de la population pendant la première année : $P_1 - P_0 = 60000 - 40000 = 20000$.

Accroissement de la population pendant la deuxième année : $P_2 - P_1 = \frac{1}{2}(P_1 - P_0) = \frac{1}{2} \times 20000 = 10000$. Donc $P_2 = P_1 + 10000 = 70000$.

Accroissement de la population pendant la troisième année : $P_3 - P_2 = \frac{1}{2}(P_2 - P_1) = \frac{1}{2} \times 10000 = 5000$. Donc $P_3 = P_2 + 5000 = 75000$.

2.

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n.$$

a. Quel que soit le naturel n, la relation (R) s'écrit

$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ qui montre que la suite (U_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $U_0 = P_1 - P_0 = 20000$

On sait qu'alors : quel que soit n, $U_n = 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. $V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - \frac{1}{2}P_{n+1} - P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = P_{n+2} - P_{n+1} - \frac{1}{2}P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = \frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) - \frac{1}{2}P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = \frac{1}{2}P_{n+1}\frac{1}{2}P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}P_n = 0.$

La suite (V_n) est donc constante. En particulier :

$V_n = V_0 = P_1 - \frac{1}{2}P_0$.

On a donc $V_n = V_0 = P_1 - \frac{1}{2}P_0 = 60000 - \frac{1}{2} \times 40000 = 40000$.

c. De $\begin{cases} U_n = P_{n+1} - P_n \\ V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n \end{cases}$ $\Rightarrow$ (par différence membre à membre

$V_n - U_n = \frac{1}{2}P_n \iff P_n = 2(V_n - U_n)$.

En utilisant les résultats trouvées pour U_n et V_n, on obtient :

$P_n = 2(V_n - U_n) = 2\left(40000 - 20000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 80000 - 40000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 80000$.

La population va au bout d'un certain nombre d'années converger vers 80 000 (au bout de 12 ans : 79 990).

Exercice 2

Partie A : étude théorique

1. D'une année à la suivante le nombre d'habitants est multiplié par 1,05 puis augmenté de 4 000.

Donc $u_1 = u_0 \times 1{,}05 + 4000 = 100000 \times 1{,}05 + 4000 = 109000$.

$u_2 = u_1 \times 1{,}05 + 4000 = 109000 \times 1{,}05 + 4000 = 118450$.

2. On a déjà vu que pour tout naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 4000$.

3. **a.** $v_0 = u_0 + 80000 = 100000 + 80000 = 180000$.

b. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} + 80000 = 1{,}05u_n + 4000 + 80000 = 1{,}05u_n + 84000 = 1{,}05\left(u_n + \frac{84000}{1{,}05}\right) = 1{,}05(u_n + 80000) = 1{,}05v_n$.

L'égalité vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 1,05 v_n$ montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 180000$ et de raison 1,05.

c. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times r^n = 180\,000 \times 1,05^n$.
Or $v_n = u_n + 80\,000 \iff u_n = v_n - 80\,000$, soit :
quel que soit le naturel n, $u_n = 180\,000 \times 1,05^n - 80\,000$.

d. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,05^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, ce qui semble irréaliste.

Partie B

1. 2020 correspond au rang $n = 15$, d'où $u_n = 180\,000 \times 1,05^{15} - 80\,000 \approx 294\,207$.

2. Il faut résoudre l'inéquation dans $\mathbb{N}$, :
$180\,000 \times 1,05^n - 80\,000 > 200\,000 \iff 180\,000 \times 1,05^n > 280\,000 \iff 1,05^n > \frac{28}{18} \iff 1,05^n > \frac{14}{9} \iff n \ln 1,05 > \ln \frac{14}{9}$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff n > \frac{\ln \frac{14}{9}}{\ln 1,05}$.
Or $\frac{\ln \frac{14}{9}}{\ln 1,05} \approx 9,05$.
Il faut attendre la 10^e^ année soit en 2015.

Exercice 3

1. On note $C_0 = 3\,000$ donc $C_1 = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) \times C_0 = 1,025 \times 3\,000$ donc $\boxed{C_1 = 3\,075}$.
   De même $C_2 = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) \times C_1 = 1,025 \times 3\,075$ donc $\boxed{C_2 = 3\,151,88}$.
2. $C_{n+1} = \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) \times C_n$ donc $\boxed{C_{n+1} = 1,025 \times C_n}$.
   (C_n) est donc une suite géométrique de raison 1,025 et de premier terme $C_0 = 3\,000$.
   Pour tout entier naturel n donc $C_n = 1,025^n \times C_0$ soit $\boxed{3\,000 \times 1,025^n}$.
3. (a)

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3 000	3 075	3 152	3 231	3 311
Condition $U \leqslant S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

   (b) Le nombre affiché est donc $2000 + n = 2004$ donc l'affichage obtenu est $\boxed{2004}$.
   (c) Le nombre obtenu est l'année où le capital obtenu dépassera la somme S.
4. Au 1^er^ janvier 2013, le capital est $C_{13} = 1,025^{13} \times 3\,000$ donc $C_{13} \approx 4\,135,53$ qui est donc plus petit que 5 000.
   On note que $C_{93} \approx 29\,815,41$ et $C_{94} \approx 30\,560,79$ donc le 1^er^ janvier 2094 son capital de 3 000 a été multiplié par 10.

II Fonctions

Exercice 3

1. La fonction est sur l'intervalle $[0;6]$, positive, donc l'aire de la surface hachurée est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^6 \left(\frac{3}{4}x^2 - 3x + 6\right) \mathrm{d}x$.
Une primitive de la la fonction est $x \longmapsto F(x) = \dfrac{1}{12}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x$, donc l'aire est égale à :
$S = \left[\dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 6x\right]_0^6 = \dfrac{1}{4} \times 6^3 - \dfrac{3}{2} \times 6^2 + 6 \times 6 = 54 - 54 + 36 = 36$ unités d'aire.
2. On a $M(x\ ;\ f(x))$, $H(x\ ;\ 0)$, $K(0\ ;\ f(x))$, donc l'aire du rectangle $OHMK$ est égale à :
$R(x) = x \times f(x) = x\left(\dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 6\right) = \dfrac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 6x = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x$.
3. **a.** Il faut résoudre l'équation $S(x) = R(x)$, soit :
$36 = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x \iff 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36 = 0$.
Il faut donc résoudre dans $[0;6]$, l'équation $g(x) = 0$, avec
$g(x) = 0,75x^3 - 3x^2 + 6x - 36$.
b. La fonction polynôme g est dérivable sur $[0;6]$ et sur cet intervalle ;
$g'(x) = 3 \times 0,75x^2 - 6x + 6 = 2,25x^2 - 6x + 6$.
Pour ce trinôme : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2,25 \times 6 = 36 - 54 = -18 < 0$.
Ce trinôme n'a pas de racines et par conséquent on a pour tout x,
$g'(x) > 0$: la fonction g est donc croissante de $g(0) = -36$ à
$g(6) = 0,75 \times 6^3 - 3 \times 6^2 + 6 \times 6 - 36 = 162 - 108 = 54$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\ ;\ 6]$ tel que $g(\alpha) = 0$. La calculatrice donne : $f(4,5) = -1,40625$ et $f(4,6) = 1,122$, donc $4,5 < \alpha < 4,6$, puis :
$f(4,55) \approx -0,16$ et $f(4,56) \approx 0,093$, donc $4,55 < \alpha < 4,56$.
On a $\alpha \approx 4,56$.

Exercice 4

Partie A

1. Le point D est sur la courbe C_f donc $\boxed{f(2) = 0}$. La tangente à la courbe C_f au point $A\ (0\ ;\ 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses donc $\boxed{f'(0) = 0}$.
2. $f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{ax} + (b - x) \times a\mathrm{e}^{ax}$ donc $\boxed{f'(x) = (-1 + ab - ax)\mathrm{e}^{ax}}$.
3. D'une part $f(2) = 0$ donc $(b-2)\mathrm{e}^{2a} = 0$, or $\mathrm{e}^{ax} > 0$ donc $b - 2 = 0$.
D'autre part $f'(0) = 0$ donc $(-1 + ab)\mathrm{e}^0 = 0$ donc $ab - 1 = 0$.
Finalement $\begin{cases} b - 2 & = & 0 \\ ab - 1 & = & 0 \end{cases}$
4. $b - 2 = 0$ donne $b = 2$ et donc $2a - 1 = 0$ donc $a = \dfrac{1}{2} = 0,5$ donc $\boxed{a = 0,5 \text{ et } b = 2}$.

Partie B

1. Sur $[0\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur de l'aire qui est entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$, exprimée en unité d'aire.
Cette aire est supérieure à 2 unités d'aire et inférieure à 4 unités d'aire donc $\boxed{2 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4}$.
a. $F'(x) = -2 \times \mathrm{e}^{0,5x} + (-2x + 8) \times 0,5\mathrm{e}^{0,5x} = -2\mathrm{e}^{0,5x} - x\mathrm{e}^{0,5x} + 4\mathrm{e}^{0,5x} = -x\mathrm{e}^{0,5x} + 2\mathrm{e}^{0,5x} = (2 - x)\mathrm{e}^{0,5x}$ donc $\boxed{F'(x) = f(x)}$.
F est donc bien une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 4\mathrm{e}^1 - 8\mathrm{e}^0 = 4\mathrm{e} - 8$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e} - 8 \approx 2,87}$.
2. Notons que $G'(x) = f(x)$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ 2]$ donc la fonction G est croissante sur $[0\ ;\ 2]$ donc la courbe de la fonction G est la courbe C_3.

Exercice 5

1. On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-0,5x-3$.
   - $-0,5x-3 > 0 \iff -3 > 0,5x \iff -6 > x$; la fonction étant définie sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction n'est pas croissante;
   - $-0,5x-3 < 0 \iff -3 < 0,5x \iff -6 < x$: la fonction est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $f(0) = 8$ à $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$.
2. Sur $[0\,;\,+\infty[$, F est dérivable et sur cet intervalle :
   $F'(x) = -2\mathrm{e}^{-0,5x} + (-2x-20)\times(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5x} = \mathrm{e}^{-0,5x}(-2x+10) = \mathrm{e}^{-0,5x} = (x+8)\mathrm{e}^{-0,5x} = f(x)$: F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_2^4 = F(4) - F(2) =$
   $(-2\times4-20)\mathrm{e}^{-0,5\times4} - \left[(-2\times2-20)\mathrm{e}^{-0,5\times2}\right] = -28\mathrm{e}^{-2} + 24\mathrm{e}^{-1} = 24\mathrm{e}^{-1} - 28\mathrm{e}^{-1} \approx 5,039 \approx 5,04$ au centième près.

ırtie B : Applications économiques

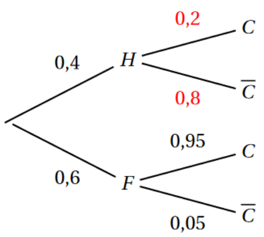
1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros. Le nombre est égal à $f(2) = (2+8)\mathrm{e}^{-0,5\times2} = 10\mathrm{e}^{-1} \approx 3,6788$ soit 3 679objets demandés.
2. On a vu dans la partie A que la fonction f pour primitive la fonction F.
   La demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros est donc égale à :
   $\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}I = \dfrac{1}{2}\left[24\mathrm{e}^{-1} - 28\mathrm{e}^{-1}\right] = 12\mathrm{e}^{-1} - 14\mathrm{e}^{-1} \approx 2520$ objets.
3. **a.** $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\times x = \dfrac{(-0,5x-3)\mathrm{e}^{-0,5x}}{(x+8)\mathrm{e}^{-0,5x}}\times x = \dfrac{-x(0,5x+3)}{x+8} = \dfrac{-0,5x^2-3x}{x+8}$.

   b. Comme $x > 0$ et $f(x) > 0$, le signe de $E(x)$ est celui de $f'(x)$; or on a vu dans la partie A que $f'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc $E(x) < 0$: cela signifie que la demande diminue lorsque le prix augmente.

   c. Il faut résoudre l'équation :
   $E(x) = -3,5 \iff \dfrac{-0,5x^2-3x}{x+8} = -3,5 \iff -0,5x^2-3x = -3,5(x+8) \iff 0,5x^2+3x-3,5x-28 = 0 \iff 0,5x^2-0,5x-28 = 0 \iff x^2-x-56 = 0$.
   Pour cette équation du second degré : $\Delta = 1+4\times56 = 225 = 15^2 > 0$.
   Il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{1+15}{2} = 8$ et $x_2 = \dfrac{1-15}{2} = -7$, donc une seule solution positive.
   L'élasticité est égale à $-3,5$ pour un prix unitaire de 800 €.
   De 800 à 808 l'augmentation est de 1 % donc correspond à l'élasticité pour $x = 8$, donc d'après la question précédente la variation de la demande est égale à $-3,5\,\%$.

III Probabilités

Exercice 1



2. **a.** $p(F \cap C) = p(F) \times p_F(C) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$.

   b. On sait que $p(C) = 0,65$, mais d'après la loi des probabilités totales :
   $p(C) = p(C \cap H) + p(C \cap F) \iff 0,65 = p(C \cap H) + 0,57 \iff p(C \cap H) = 0,65 - 0,57 = 0,08$.

   c. Il faut trouver $p_H(C) = \dfrac{p(H \cap C)}{p(H)} = \dfrac{0,08}{0,4} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.

   d. Voir l'arbre.

3. On a $p\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,65 = 0,35$.

   Donc $p_{\overline{C}}(H) = \dfrac{p\left(\overline{C} \cap H\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \dfrac{0,4 \times 0,8}{0,35} = \dfrac{0,32}{0,35} = \dfrac{32}{35} \approx 0,91$.

4. La variable aléatoire égale au nombre de personnes non inscrites aux cours collectifs suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et de probabilité $p = p\left(\overline{C}\right) = 0,35$.
   La probabilité que toutes les fiches soient celles de membres inscrits aux cours collectifs est égale à : $(1 - 0,35)^3$.
   Donc la probabilité qu'une personne au moins soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs est égale à $1 - 0,65^3 = 0,725375 \approx 0,73$ au centième près.

Exercice 2

1. **a.** $\boxed{p(30 \leqslant X \leqslant 35) \approx 0,133}$.

   b. $p(X \geqslant 55) = 0,5 - p(40,5 \leqslant X \leqslant 55)$ donc $\boxed{p(X \geqslant 55) \approx 0,113}$.

2. **a.** $n = 1000 \leqslant 30$, $p = 0,75$ et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la fréquence est donné par
   $$I_F = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   Remarque : $n \geqslant 30$, $n \times p = 1000 \times 0,75 = 750 \geqslant 5$ et $n \times (1-p) = 250 \geqslant 5$.
   donc $\boxed{I_F = [0,723\ ;\ 0,777]}$.

   b. On suppose que $p = 0,75$ et on note f_{obs} la fréquence observée sur un échantillon de taille $n = 1000$.
   Si f_{obs} appartient à I_F alors on accepte l'hypothèse $p = 0,75$;
   Si f_{obs} n'appartient pas à I_F alors on rejette l'hypothèse $p = 0,75$ avec un risque de 5 % de se tromper.

   c. $f_{\text{obs}} = \dfrac{600}{1000} = 0,6$ donc f_{obs} n'appartient pas à I_F (défini ci-dessus). On peut penser que le slogan publicitaire est faux avec un risque de 5 % de se tromper.

Exercice 3

1. **a.** On a observé que 78 copies ont obtenu une note supérieure ou égale à 10, donc la proportion de copies de l'échantillon ayant obtenu une note supérieure ou égale à 10 est : $f = \dfrac{78}{160} = 0,4875$.

   b. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion des copies qui obtiendront une note supérieure ou égale à 10 dans l'ensemble des copies est donné par $I_n = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n est la taille de l'échantillon et f la fréquence observée dans cet échantillon.
   $$I_n = \left[0,4875 - \frac{1}{\sqrt{160}}\ ;\ 0,4875 + \frac{1}{\sqrt{160}}\right] \approx [0,4084\ ;\ 0,5666]$$

   c. L'amplitude de l'intervalle I_n est $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Pour que cette amplitude soit inférieure à 0,04 il faut déterminer n tel que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}04$.

On résout cette inéquation :

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0{,}04 \Leftrightarrow 2 < 0{,}04 \times \sqrt{n} \Leftrightarrow \dfrac{2}{0{,}04} < \sqrt{n} \Leftrightarrow 50 < \sqrt{n} \Leftrightarrow 2\,500 < n$

Il faut donc que l'échantillon ait une taille supérieure à 2 500 pour que l'intervalle de confiance au seuil 95 % ait une amplitude inférieure à 0,04.

2. a. On sait que si une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors $P\left(X \in [\mu - 2\sigma\,;\, \mu + 2\sigma]\right) \approx 0{,}95$.

Ici $\mu = 10{,}5$ et $\sigma = 2$, donc l'intervalle $[10{,}5 - 4\,;\, 10{,}5 + 4] = [6{,}5\,;\, 14{,}5]$ devrait contenir à peu près 95 % des notes des candidats.

b. La calculatrice donne directement $P(X > 12) \approx 0{,}2266$.

En utilisant le tableau fourni en annexe :

$P(X > 12) = 1 - P(X \leqslant 12) \approx 1 - 0{,}7734 \approx 0{,}2266$.

IV Un peu de tout

Exercice 1

1. Il faut résoudre l'inéquation : $0{,}98^n \leqslant 0{,}5 \iff n \ln 0{,}98 \leqslant \ln 0{,}5 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}98}$. Or $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}98} \approx 34{,}3$: il faut attendre 35 ans.
2. Soit t ce pourcentage ; le prix est multiplié par $1 + t$ puis par $1 - t$ soit finalement par $1 - t^2$: il a donc baissé.
3. Soit t ce taux d'accroissement moyen sur les 40 ans ; on a donc :
   $(1+t)^{40} = 2 \iff 1 + t = 2^{\frac{1}{40}} \iff t = 2^{\frac{1}{40}} - 1 \approx 0{,}01748$ soit environ 1,75 %.
4. $(\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^{3x-1} = \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^{3x-1} = \mathrm{e}^{2x+3x-1} = \mathrm{e}^{5x-1} = \mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}}$.
5. Réponse D car $\ln \mathrm{e}^{-2} = -2$.
6. Si $x + 3 > 0$, soit $x > -3$, $\ln(x+3) < \ln 6 \iff x + 3 < 6 \iff x < 3$.
   Les nombres solutions sont les réels de l'intervalle $]-3\,;\,3[$.
7. L'intégrale est égale à $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^4 = \dfrac{4^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = \dfrac{64-1}{3} = \dfrac{63}{3} = 21$.
8. La valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ est égale : $\dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}[\ln x]_1^3 = \dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \dfrac{\ln 3}{2} = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{3}$.

Exercice 2

1. **a.** Il y a 10 % de jetons bleus, donc 30 % de jetons blancs et il reste 60 % de jetons rouges.
Si le jeton tiré est rouge le gain est de 2 euros, s'il est blanc le gain est de 4 euros et s'il est bleu la perte est 8 euros. On a donc le tableau de la loi de probabilité suivant :

	rouge	blanc	bleu
probabilité	0,6	0,3	0,1
gain	2	4	−8

b. Le gain moyen est égal à l'espérance mathématique de la variable aléatoire « gain », soit :
$E = 0,6 \times 2 + 0,3 \times 4 + 0,1 \times (-8) = 1,2 + 1,2 - 0,8 = 1,6$.
En moyenne on gagnera 1,60 € par partie jouée.

2. **a.** Le tableau de la loi de probabilité est alors :

	rouge	blanc	bleu
probabilité	0,6	0,3	0,1
gain	g_0	g_0^2	$-g_0^3$

Le gain moyen est donc :
$0,6g_0 + 0,3g_0^2 - 0,1g_0^3$: c'est la ou les valeurs maximales de la fonction f définie par :

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x.$$

b. $f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 0,6$.

c. $f'(x) = 0,3(-x^2 + 2x + 0,2)$.
Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme : $-x^2 + 2x + 2$.
$\Delta = 4 + 8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$.

Ce trinôme s'annule donc en $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = 1+\sqrt{3}$.
le trinôme est négatif sauf sur $\left]1-\sqrt{3}\,;\,1+\sqrt{3}\right[$.
Les extremums sont obtenus pour les valeurs de la variable qui annulent la dérivée, soit :
$f\left(1-\sqrt{3}\right) = -0,1\left(1-\sqrt{3}\right)^3 + 0,3\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + 0,6\left(1-\sqrt{3}\right) \approx -0,24$ (minimum)
et
$f\left(1+\sqrt{3}\right) = -0,1\left(1+\sqrt{3}\right)^3 + 0,3\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + 0,6\left(1+\sqrt{3}\right) \approx 1,839$ (maximum)
soit environ 1,84 €.

d. Pour $x = 1+\sqrt{3} \approx 2,73$ valeur du gain de base, le gain moyen espéré pour chaque partie sur un grand nombre de parties est environ 1,84 euro.

Exercice 3

1. Réponse **a.** : $-1 + 2^{31}$
Il faut reconnaitre la somme des 31 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 20.
2. Réponse **b.** : trois solutions distinctes
$-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0 \iff -\dfrac{1}{3}x\left(x^2 - 3x^2 - 9\right) = 0$; $x = 0$ est une solution et le discriminant du trinôme $x^2 - 3x^2 - 9$ est strictement positif ce qui donne deux solutions distinctes et différentes de 0.
3. Réponse **c.** : $F(x) = x\ln x - x$.
Il suffit de dériver cette fonction F.
4. Réponse **b.** : $n \geqslant 9$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 0,003 \iff \ln\left(0,5^n\right) < \ln 0,003 \iff n\ln 0,5 < \ln 0,003 \iff n > \dfrac{\ln 0,003}{\ln 0,5}$ et $\dfrac{\ln 0,003}{\ln 0,5} \approx 8,38$

Exercice 4

1. À la fin des deux ans, je possède : $750 \times 1,038^2 + 750 \times 1,038 = 1690,38$ €.
2. $\ln\left(e^2 + e\right) = \ln(e[e+1]) = \ln[e] + \ln[e+1] = 1 + \ln[e+1]$
3. $\ln\left(x^2 + 3x\right)$ existe si $x^2 + 3x > 0 \iff x(x+3) > 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-3[\cup]0\,;\,+\infty[$; $\ln x$ existe si $x > 0$ et $\ln(x+3)$ existe si $x > -3$,donc l'égalité est vraie uniquement si $x > 0$.
4. Il y a 12 valeurs ; la médiane est la moyenne des sixième et septième valeurs : $M = \dfrac{15 + 15,2}{2} = 15,1$.
5. Une primitive de $x \longmapsto e^{2x}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^{2x}$, donc :
$\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{2\times 1} - \left(\frac{1}{2}e^{2\times 0}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$.
6. Le coefficient de la tangente au point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé de la fonction en 1, donc $f'(1) = -1$.
7. On a $F'(x) = \dfrac{2}{2x + 10} = \dfrac{1}{x + 5}$.