« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps de calcul de quelques mois à quelques jours, double la vie des astronomes. »

P-S de Laplace

I La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

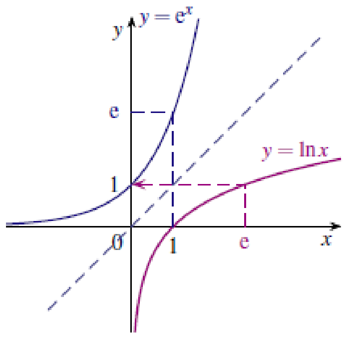
La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $e^x \in]0;+\infty[$.
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



Définition La fonction logarithme népérien, notée ln , est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$,

$$x > 0 \text{ et } y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

Remarques

— On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

— $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.

— $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

— Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

Conséquences importantes

(i) Pour tout réel $x > 0, e^{\ln x} = x$,
(ii) Pour tout réel $x, \ln(e^x) = x$.

En effet :

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff e^y = x$ donc $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $e^x = y \iff \ln(y) = x$ soit $\ln(e^x) = x$.

Exemples 1) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

2) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

Un peu d'histoire des maths

la fin du XVI^{e} siècle est l'époque des grands voyageurs maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler, ect.).
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on cherche des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondances les nombres de telle manière qu'à la *multiplication* de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'*addition* de deux nombres de la colonne de droite.
La 1ère table de ce type est publiée en 1614 par John Napier ou Neper (mathématicien, physicien et astronome écossais, 1550 – 1617) après 40 ans de travail, et il crée leur nom, composé des mots grecs ancien *logos* (« rapport ») et *arithmos* (« nombre »).

Le livre dans lequel figurait ces tables servait ainsi à déterminer et à noter sa position jour après jour, mais aussi la météo, l'état du navire, le moral de l'équipage…
Ce journal de bord s'appelait un *log-book*.
On a conservé ce terme et lorsque son support a changé, que le journal s'est écrit non plus sur un livre mais sur internet, il s'est dénommé *web-log* qui, par contraction, a donné le mot *blog* !

1.2 Propriétés algébriques

On a la propriété fondamentale suivante :

Propriété *Relation fonctionnelle*
Pour tous nombres réels a, b strictement positifs :
$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

Démonstration

Par définition de la fonction ln : $a = e^{\ln a}$, $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$
D'autre part, $a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$
D'où $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$. Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Propriétés
Pour tous nombres réels a, b strictement positifs et n entier relatif :
(i) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
(ii) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
(iii) $\ln(a^n) = n \ln a$
(iv) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

Démonstrations

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \iff \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

2. Soient $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,

$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$

Donc $\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n\ln a$.

4. Soit $a > 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = a$ donc

$$\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

Exemples

1) Simplification d'écriture : $A = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{27}\right) + \ln 24 - \ln 8 = \ln\sqrt{3} - \ln 27 + \ln(3\times 8) - \ln 8 = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3^3 + \ln 3 + \ln 8 - \ln 8 = \frac{1}{2}\ln 3 - 3\ln 3 + \ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3 - 2\ln 3 = -\frac{3}{2}\ln 3$.

2) Simplifions $B = \ln(x^2 - 1) - \ln((x-1)^2)$ pour $x > 1$.

$B = \ln\frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \ln\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

3) Résolution de l'équation (Q): $\ln^2 x - 2\ln x + 1 = 0$. On se ramène à une équation du 2nd degré en effectuant le changement de variable suivant $X = \ln x$. Soit (Q): $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Donc (Q) a pour ensemble solution $S = \{e\}$.

II Etude de la fonction logarithme

2.1 Dérivée et sens de variation

Propriété
Pour tout nombre réel $x > 0$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

Démonstration

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Or si $x > 0$ alors, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0 $+\infty$
$x \longmapsto \ln x$	$\Vert$ $\nearrow$

Conséquences importantes

Pour tous réels a et b strictement positifs :

(i) $\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$;

(ii) $\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$;

(iii) $\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$;

(iv) $\ln x > 0$ si, et seulement si,$x > 1$;

(v) $\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$.

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x > 0, \ln x \in \mathbb{R}$ alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

Pour tout réel k, l'équation $\ln x = k$ admet dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ une unique solution $x = e^{x}$.

Exemples 1) Résolution de l'équation :

$(E_1) :\ \ln(x-1) + \ln(x+1) = 1$ pour $x > 1$.

$(E_1) \Leftrightarrow \ln\big((x-1)(x+1)\big) = \ln e \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = \ln e \Leftrightarrow$
$x^2 - 1 = e \Leftrightarrow x^2 = 1 + e \Leftrightarrow x = \sqrt{1+e}$ car $x > 1$.

2) Résolution de l'inéquation $\ln(x^2+1) \geq \ln 5$:
Cela équivaut à résoudre : $x^2 - 4 \geq 0$ dont les racines sont 2 et -2.

L'ensemble solution est donc : $S =]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$

2.2 Courbe représentative

Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.

— $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(\mathrm{e};1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.

— Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ est $\ln'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $B(\mathrm{e};1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1 \iff y = \frac{1}{\mathrm{e}}x$$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

— Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante.
Par conséquent, la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.