Exercice 1

1. $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$.
2. Figure
3. * $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{AN} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Soit : $\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}$.
   * $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$ soit $\boxed{\overrightarrow{NP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$.

4. On remarque que $\overrightarrow{NP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{MN}$. Les vecteurs $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires ce qui veut dire que <u>les points M,N et P sont alignés.</u>

Exercice 2

1. (a) d passe par $A(2;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1:2)$.
   d' passe par $B(3;-2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(4;3)$.

   On conjecture graphiquement que les droites d et d' sont sécantes en $I(3;-2)$.

   (b) $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = -1\times 3 - 4\times 2 = -11 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites d et $'$ sont sécantes.

   (c) Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et d', on résout le système : $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 3x-4y-17=0 \end{cases}$.

   $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 3x-4y-17=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-2x+4 \\ 3x-4(-2x+4)-17=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-2\times 3+3=-2 \\ x=3 \end{cases}$

   d et d' sont bien sécantes en $I(3;-2)$.

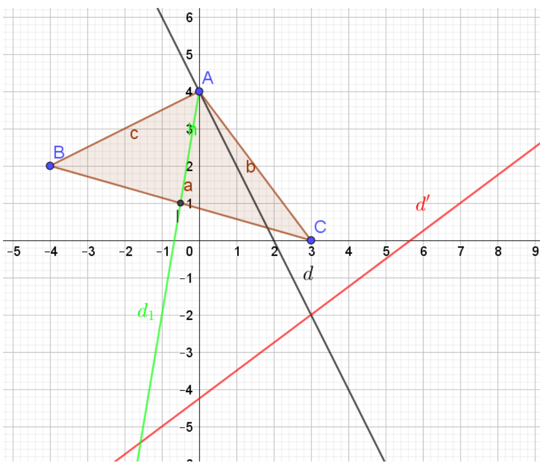
(b) La médiane issue de A dans le triangle ABC est la droite qui passe par A et le milieu I de $[BC]$.

$I\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

$M(x;y) \in (AI)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}(x;y-4)$ et $\overrightarrow{AI}\left(-\frac{1}{2};-3\right)$.

$(AI) : -2x + \frac{1}{2}(y-4) = 0 \iff -2x + \frac{1}{2}y - 2 = 0.$



(c) On a aussi $d_1 : -4x + 2y - 4 = 0$. De plus, $d : 2x + y - 4 = 0$.

On a : $-4 \times 1 - 2 \times 2 = -8 \neq 0$. Donc les droites d_1 et d sont sécantes (en A).

3. Donnons l'équation réduite de d : $y = -2x + 4$.

Etudions la différence $D(x) = 2x^2 + x - 1 - (-2x + 4)$

On a $D(x) = 2x^2 + 3x - 5$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 > 0$

Les racines sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{4} = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{4} = 1$

D'où le tableau de signe de $D(x)$ (a>0) :

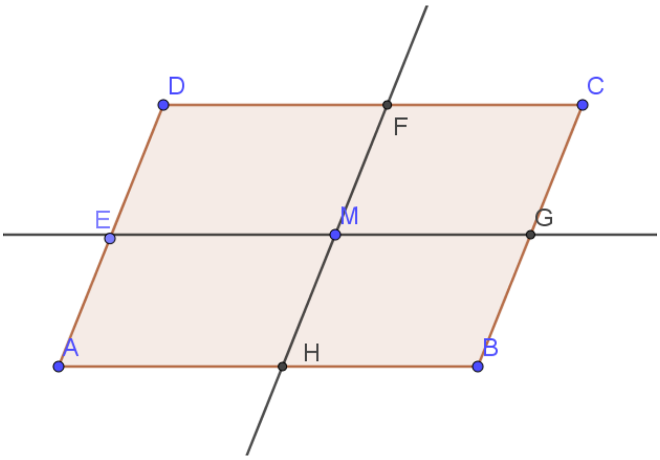
x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bilan

- Sur $]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [1; +\infty[$, $D(x) \geq 0$ soit $2x^2 + x + 1 \geq -2x + 4$. C'est-à-dire que sur $]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$, P est au-dessus de d.
- Sur $\left[-\frac{5}{2}; 1\right]$, $D(x) \leq 0$ soit $2x^2 + x + 1 \leq -2x + 4$. C'est-à-dire que sur $[-5; 1]$, P est en-dessous de d.

Exercice 3

1.



2. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, on a : $A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(1; 0), M(x; y), H(x; 0), F(x; 1), E(0; y), G(1; y)$.
3. a) Déterminons les vecteurs directeurs des deux droites (EF) et (GH) :
   - (EF) : Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur. On a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix}$
   - (GH) : Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur. On a $\vec{v}\begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}$

(GH) et (EF) sont parallèles ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy - (1-x)(1-y) = 0$ ssi $xy - (1 - y - x + xy) = 0$ ssi $\boxed{y + x = 1}$.

b) D'après ce que l'on a vu précédemment, on a : $y + x = 1$ soit encore $x + y - 1 = 0$. Qui est l'équation cartésienne d'une droite.

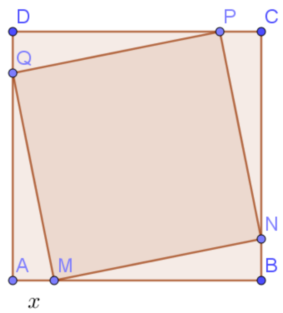
4. Déterminons les vecteurs directeurs des deux droites (FG) et (EH) :
    - (FG) : Soit $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur. On a $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1-x\\y-1\end{pmatrix}$
    - (EH) : Soit $\overrightarrow{v'}$ un vecteur directeur. On a $\vec{v}'\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$

(FG) et (EH) sont parallèles ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi$(1-x)(-y)-x(y-1)=0$ ssi $-y+xy-xy+x=0$ ssi $\boxed{x-y=0}$. C'est une droite.

5. EFGH est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$ ssi $\begin{pmatrix}x\\1-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x\\y\end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases}x=1-x\\1-y=y\end{cases}$ ssi $\begin{cases}2x=1\\2y=1\end{cases}$ssi $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

   Pour que EFGH soit un parallélogramme il faut que M ait pour coordonnées (1/2 ;1/2).

Exercice 4



1. D'après le théorème de Pythagore, on a dans le triangle MBN rectangle en B :
$$MN^2=MB^2+NB^2=(1-x)^2+x^2=1-2x+x^2+x^2=2x^2-2x+1$$
   Donc :
   $S(x)=MN^2=\boxed{2x^2-2x+1}$.
2. Le minimum de cette fonction est atteint en $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times 2}=\boxed{\frac{1}{2}}$.

   Et le minimum vaut : $S\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$.
3. $S(x)\leq\frac{5}{9}\Leftrightarrow 2x^2-2x+1\leq\frac{5}{9}\Leftrightarrow 2x^2-2x+\frac{4}{9}\leq 0$

   On a $\Delta=\frac{4}{9}>0$. Les racines sont $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Comme a>0, on conclut que $\boxed{S=[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]}$ d'après la règle du signe d'un trinôme.

Exercice 5

- Etude du trinôme x^2-2x+1 :
  On remarque que $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Son unique racine est 1. De plus $a=1>0$.
- Etude du trinôme x^2-2x-3 :
  On a $\Delta=b^2-4ac=4+12=16>0$. Il y a deux racines :
  $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{2}=-1$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4}{2}=3$.
  De plus, $a=1>0$.

On en déduit le tableau de signe complet du quotient $Q(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	
$Q(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

On conclut que $\boldsymbol{S} =]-\infty; -\mathbf{1}[\cup]\mathbf{3}; +\infty[\cup\{\mathbf{1}\}$

__Exercice 6__

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $(x-3)(x+1)+4x^2=0$ ssi $x^2-2x-3+4x^2=0$ ssi $5x^2-2x-3=0$

On a : $\Delta = 4+60=64>0$; Il y a deux solutions :

$x_1=\frac{2+\sqrt{64}}{10}=1$ et $x_2=\frac{2-\sqrt{64}}{10}=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$

Les valeurs de x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires sont $\mathbf{1}$ et $-\frac{3}{5}$.