Lycée militaire de Saint-Cyr **DS n°8 de mathématiques** **1reS - 404**

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Tous les résultats devront être soulignés.

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Après avoir justifié les variations de la fonction f, dresser son tableau de variations sur son ensemble de définition.
3. En déduire que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner son ensemble de définition que l'on notera D_f.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur D_f.
4. Démontrer que C_f ne coupe pas l'axe de abscisses.
5. Déterminer a et b tels que $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$.
6. Soit la droite $D: y = x$, déterminer la position relative de D et de C_f.

Exercice 3

ABCD est un carré de côté 4 cm. Pour tout point M de [AB] distinct de A et de B, on nomme I le point d'intersection de [DM] et [AC], x la longueur AM et $\mathscr{A}(x)$ l'aire totale des deux triangles AMI et DCI.

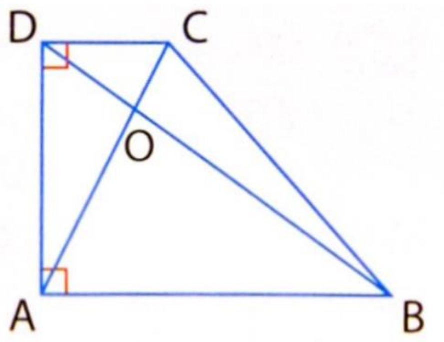
1. Soit h la hauteur issue de I dans le triangle AMI.
   Montrer que $\dfrac{h}{4-h} = \dfrac{x}{4}$ puis exprimer h en fonction de x.
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = \dfrac{2(x^2+16)}{x+4}$ pour tout $x \in]0; 4[$.
3. Étudier les variations de $\mathscr{A}(x)$ et en déduire la position de M pour laquelle l'aire totale est minimale.

Exercice 4

On considère la figure ci-dessous où ABCD est un trapèze rectangle tel que :

$AB = 8, CD = 3$ et $AD = 6$.

O est le point d'intersection des diagonales.



On considère la figure ci-dessus où ABCD est un trapèze rectangle tel que :

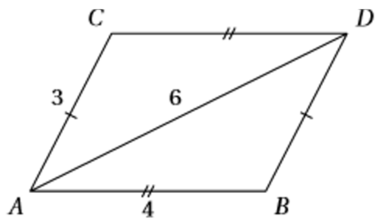
$AB = 8, CD = 3$ et $AD = 6$.

O est le point d'intersection des diagonales.

1. a) Démontrer que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 36$.
   b) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$ au degré près.
2. En déduire que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 12$ *Indication : décomposer le vecteur $\overrightarrow{DB}$ et appeler H le projeté orthogonal de C sur (AB).*

<u>Exercice 5</u>

Soit le parallélogramme ABDC suivant :



1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5.5$.
2. En déduire que la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.
3. a) Développer $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$.
   b) En déduire la distance BC.

<u>Exercice 6</u>

1. On considère la droite D d'équation cartésienne $5x + 2y + 1 = 0$ et la droite d d'équation réduite $y = \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}$. Soit le point $B(10; 2)$.
   a) Donner un vecteur normal de chacune des deux droites. D et d sont-elles perpendiculaires ?
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 perpendiculaire à D et passant par B.
   c) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 perpendiculaire à d et passant par B.

2. Donner les caractéristiques de l'ensemble suivant : $\Omega: x^2 + y^2 - 2x + 5y = 5$. *Indication : Mettre sous forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$.*

BONUS !

Existe-t-il une fonction polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (1 ; 1) et admette en ces points des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

Barème indicatif / 25 : **Ex 1** : 2.5 **Ex 2** : 6 **Ex 3** : 4.5 **Ex 4 :** 3.5 **Ex 5 :** 3.5 **Ex 6 :** 5