LMSC **Corrigé du DS n°8** **1re S**

Exercice 1

1. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.
2. Le signe de $f'(x)$ dépend de $x^2 - 1$ puisque $x^2 > 0$. Donnons le signe du trinôme $x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau complet de la fonction f sur son ensemble de définition :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$		$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

3. D'après le tableau de variation de la fonction f, on constate que f admet un minimum en 0 qui vaut 2.
   Donc, on pour tout $x > 0, f(x) \geq 2$ *soit* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 2

1. $f(x)$ existe ssi $x + 1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$. Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
2. $f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+4)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-4}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
3. Comme $(x+1)^2 > 0$ sur D_f, le signe de $f'(x)$ dépend du signe du trinôme $x^2 + 2x - 3$. Etudions-le :
   $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$;$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.
   On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et les variations de f qui en découlent :

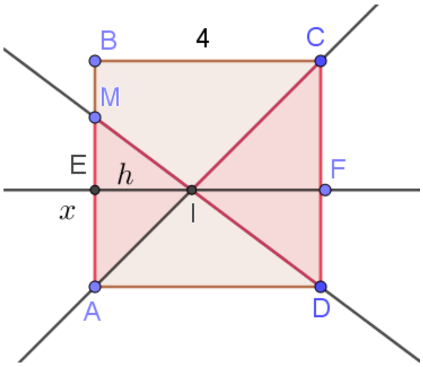
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

4. Pour que C_f coupe l'axe des abscisses il faut qu'il existe x tel que $f(x) = 0$.
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = 0$. Or, $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$. Donc il n'existe pas de x tel que $f(x) = 0$ soit C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
5. $ax + \frac{b}{x+1} = \frac{ax(x+1)+b}{x+1} = \frac{ax^2+ax+b}{x+1} = f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$.

   En identifiant, on a $a = 1$ *et* $b = 4$.

6. Posons $h(x) = f(x) - y$ afin d'étudier son signe.
   On a $h(x) = x + \frac{4}{x+1} - x = \frac{4}{x+1}$. Son signe dépend de $x + 1$ qui s'annule en -1.
   Pour $x > -1, h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - y > 0 \Leftrightarrow f(x) > y$; donc C_f est au-dessus de D sur $]-1;+\infty[$.
   Pour $x < -1, h(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - y < 0 \Leftrightarrow f(x) < y$; donc C_f est en-dessous de D sur $]-\infty;-1[$.

Exercice 3



1. On est dans une configuration de Thalès en considérant les deux triangles AMI et DCI.
   On a : $\frac{EI}{IF} = \frac{AM}{DC} = \frac{MI}{ID} = \frac{AI}{IC}$. En gardant la 1re égalité, on obtient : $\boxed{\frac{h}{4-h} = \frac{x}{4}}$.
   Exprimons h en fonction de x. D'après la relation précédente, on a :
   $4h = x(4-h) \Leftrightarrow 4h = 4x - xh \Leftrightarrow h(4+x) = 4x \Leftrightarrow h = \frac{4x}{4+x}$.
2. $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{AMI} + \mathcal{A}_{DCI} = \frac{DC \times IF}{2} + \frac{AM \times IE}{2} = \frac{4(4-h)}{2} + \frac{x \times h}{2} = 2\left(4 - \frac{4x}{4+x}\right) + \frac{1}{2}x\frac{4x}{4+x} = 8 - \frac{8x}{4+x} + \frac{2x^2}{4+x} = \frac{32+8x-8x+2x^2}{4+x} = \frac{2x^2+16}{4+x} = \boxed{\frac{2(x^2+16)}{4+x}}$
3. $\mathcal{A}'(x) = 2\frac{2x(4+x)-(x^2+16)}{(4+x)^2} = 2\frac{8x+2x^2-x^2-16}{(4+x)^2} = 2\frac{x^2+8x-16}{(4+x)^2} = 2\frac{x^2+8x-16}{(4+x)^2}$
   Le signe de la dérivée dépend du signe de $x^2 + 8x - 16$ puisque $(4+x)^2 > 0$ sur $]0;4[$.
   On a $\Delta = 8^2 + 4 \times 16 = 128 > 0$
   Les racines sont : $x_1 = \frac{-8-\sqrt{128}}{2} = \frac{-8-8\sqrt{2}}{2} = -4-4\sqrt{2}$ et $x_2 = -4+4\sqrt{2} \approx 1{,}66$
   Soit le signe de $\mathcal{A}'(x)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de $\mathcal{A}$:

x	0		x_2		4
$\mathcal{A}'(x)$		$-$		$+$	
$\mathcal{A}$		$\searrow$	$\mathcal{A}(x_2)$	$\nearrow$	

Exercice 4

1. a) On a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AD \times AD = 6 \times 6 = 36$.
   b) On a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC \times AD \times \cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = AC \times AD \times \cos(\widehat{CAD})$
   Déterminons la distance AC en se plaçant dans le triangle ADC rectangle en D et en appliquant Pythagore :
   $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 36 + 9 = 45$ soit $AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
   D'où : $\cos(\widehat{CAD}) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}}{AC \times AD} = \frac{36}{3\sqrt{5} \times 6} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ soit $\widehat{CAD} \approx 27^\circ$.

2. On a $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - HA \times AB = 36 - 3 \times 8 = 36 - 24 = 12$.

Exercice 5

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - AB^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}(36 - 16 - 9) = \frac{11}{2} = 5{,}5$.
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
   soit $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{5{,}5}{4 \times 3}$ soit $\widehat{BAC} \approx 63^\circ$
3. $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BC}^2$ et aussi $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 = 16 - 2 \times 5{,}5 + 9 = 25 - 11 = 14$
   Donc $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = 14$ soit $BC = \sqrt{14}$.

Exercice 6

1. a) Un vecteur normal pour D est $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$. Pour l'équation de d, on peut la mettre sous la forme $-\frac{2}{5}x + y - \frac{5}{2} = 0$ soit un vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$.
   On constate que $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 5 \times \left(-\frac{2}{5}\right) + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0$. Les vecteurs $\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.
   Donc <u>les droites d et D sont perpendiculaires</u>.
   b) Comme d_1 est perpendiculaire à D, on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur directeur à d_1.
   Soit $M(x; y) \in d_1$ alors $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-10\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $2(x - 10) - 5(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 20 - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow \boxed{2x - 5y - 10 = 0 : d_1}$
   c) Comme d_2 est perpendiculaire à D, on en déduit que $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur directeur à d_2.
   Soit $M(x; y) \in d_2$ alors $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-10\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $(x - 10) + \frac{2}{5}(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 10 + \frac{2}{5}y - \frac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + \frac{2}{5}y - \frac{54}{5} = 0 : d_2}$

2. $x^2 + y^2 - 2x + 5y = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$
   Ω est le cercle de centre $I(1; -\frac{5}{2})$ et de rayon $R = \frac{7}{2}$.