Annexe	Notations et raisonnements mathématiques au lycée

Il s'agit de présenter d'une part des symboles et notations et d'autre part, quelques principes de raisonnement. L'élaboration d'un cours de logique avec toute la rigueur qui s'impose est ici hors sujet. Si l'utilisation n'est pas exigible, on ne doit pas s'en priver ; les réserver cependant à des exposés synthétiques.

I ET – OU - Ensembles

Dans le langage mathématique, le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».
Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

si A est un ensemble de nombres alors A^* est l'ensemble A privé du nombre 0.
Exemple $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privés de 0.

A et B étant deux ensembles de nombres, l'ensemble noté $A\times B$ est le produit cartésien de A par B . C'est l'ensemble des couples de nombres de la forme (a,b) où A et b décrit B .

Exemple $\mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (a,b) de réels.

$\in$ désigne l'appartenance à un ensemble et $\notin$ désigne le non-appartenance à un ensemble.
Exemple $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E, et on note $F \subset E$, pour exprimer que tout élément de F est également élément de E.
Exemple On a l'inclusion importante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Dans la suite, on notera A et B deux ensembles quelconques.

On appelle réunion de A et B l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à A ou à B. Cet ensemble se note $A \cup B$ et se lit « A union B ».
Exemple Soit $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq 0\}$ et $B = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq 0\}$, alors $A \cup B = \mathbb{R}$.

On appelle intersection de A et B l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à A et à B. Cet ensemble se note $A \cap B$ et se lit « A inter B ».
Exemple Soit $A = [1; 3]$ et $B = [2; 4]$, alors $A \cap B = [2; 3]$.

On appelle complémentaire de l'ensemble A l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A. Cet ensemble se note $\bar{A}$ et se lit « A barre ».
Exemple Soit $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq 0\}$, alors $\bar{A} = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < 0\}$.

$\emptyset$ représente l'ensemble vide ; c'est l'ensemble ne contenant aucun élément.
Exemple Soit $A = [1; 3]$ et $B = [4; 6]$, alors $A \cap B = \emptyset$.

Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors on a A = B et réciproquement.

Remarque Ce résultat permet de démontrer que deux ensembles sont identiques.

II Les quantificateurs universel, existentiel

On utilise souvent, en mathématiques, les expressions, « il existe », « quel que soit » appelés quantificateurs. Par exemple : Quel que soient les réels a et b, $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, il existe un réel x tel que $2x - 1 = 1$.

On pourra noter « il existe » de la façon suivante : $\exists$.
De même, on pourra noter « quel que soit » : $\forall$.

Exemples 1) $\exists\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 - 1 = 0$
2) $\forall\ x \in \mathbb{R}\ ;\ (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$.

III Proposition vraie ou fausse

Une proposition est une phrase (avec un verbe) qui peut être vraie ou fausse.

Exemples 1) « 2 est un nombre pair » est une proposition vraie.
2) « 5 est un nombre pair » est une proposition fausse.
3) « $x > y$ » est vraie pour $x = 3$ et $y = 2$ mais fausse pour $x = 1$ et $y = 0$.

IV Négation d'une proposition

La négation d'une proposition est la proposition obtenue en affirmant son « contraire ». La négation d'une proposition A est vraie quand A est fausse, fausse quand A est vraie.

Exemples 1) La négation de « 2 est un nombre pair » (vraie) est « 2 n'est pas un nombre pair » (fausse).
2) La négation de « $x \geq 1$ » est « $x < 1$ ».

V L'implication et la réciproque

Une proposition conditionnelle (ou implication) est une phrase du type :
« Si *proposition A* alors *proposition B* ».
Une implication est soit vraie, soit fausse.

Notation « Si A alors B » peut se noter : « $A \Rightarrow B$ » ce qui se lit : « A implique B ».

Remarque Quand on sait que « si A alors B » est vraie (c'est par exemple une propriété du cours), on est sûr que lorsque la proposition A est vraie, la proposition B est automatiquement vraie.
Attention, lorsque la proposition A est fausse, on ne peut rien dire sur B ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse.

Exemples 1) « Si $x = 3$ alors $x^2 = 9$ » est une proposition vraie.
2) «$x = 5 \Rightarrow 3x = 20$ » est une implication fausse.
3) Le théorème de Pythagore : Si le triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

La proposition conditionnelle : « si proposition A alors proposition B » a pour réciproque « si proposition B alors proposition B ».
Elles peuvent être vraies ou fausses indépendamment l'une de l'autre.

Exemples 1) La réciproque du théorème de Pythagore : « Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.
2) Soit la proposition : « Si $x = 3$ alors $2x = 6$ » (vraie). Sa réciproque est : « Si $2x = 6$ alors $x = 3$» (vraie).
3) Soit la proposition : « Si $x = 3$ alors $x^2 = 9$ » (vraie). Sa réciproque est : « Si $x^2 = 9$ alors $x = 3$» (fausse).

VI La démonstration par le contre-exemple

Pour démontrer que l'implication « $A \Rightarrow B$ » est fausse, on montre que A peut être vérifiée alors que B n'est pas vérifiée. Pour cela, on trouve un contre-exemple.

Exemples 1) Pour démontrer que la proposition « pour tout nombre x, on a $x^2 - 2 \geq 0$ » est fausse, on cherche un contre-exemple, c'est-à-dire trouver un nombre x tel $x^2 - 2 < 0$. Le contre-exemple $x = 1$ convient.
2) Démontrons que la proposition « pour tout nombre x, $(x+1)^2 = x^2 + 1$ » est fausse. Il suffit de donner un contre-exemple : pour $x = 2$, $(x+1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$ donc $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$ ».

VII L'équivalence

La proposition « A si et seulement si B » est la proposition « si A alors B » et « si B alors A ». On dit que A et B sont équivalentes : elles sont vraies en même temps, fausses en même temps.

Notation « A équivaut à B » se note $A \Leftrightarrow B$.

Exemples 1) « ABC est un triangle isocèle en A si et seulement si AB=AC »
2) « $2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ »
3) « $x = 1 \; ou \; x = -1 \Leftrightarrow x^2 = 1$ »

VIII Raisonnement par l'absurde

On commence par supposer que l'hypothèse est fausse pour aboutir à un résultat absurde (ou faux) alors on aura démontré que le résultat attendu était juste.

Exemple S'il existe un réel x tel que $x^2 + \sqrt{2}$=0 alors $x^2 = -\sqrt{2}$ or c'est impossible car un carré est toujours positif, donc l'équation $x^2 + \sqrt{2}$=0 n'admet pas de solution réelle.

IX Raisonnement par disjonction des cas

C'est une démonstration qui se traite en séparant les différents cas.

Exemple Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$ si $x > 0$ et $f(x) = -\frac{1}{2}$ si $x \leq 0$.
La résolution de l'équation $f(x) = 2$ implique de différencier deux cas :
* Si $x > 0$, alors la solution est $x = 4$.
* Si $x \leq 0$, alors il n'y a pas de solution.
Donc l'ensemble solution est : $\mathcal{S} = \{4\}$.

X QCM

1. La négation de la proposition « f est croissante sur I » est :
   A. f est constante sur I.
   B. f est décroissante sur I.
   C. f n'est ni croissante, ni décroissante sur I.
   D. f est croissante puis décroissante sur I.

2. L'écriture à l'aide des quantificateurs la proposition suivante : « f est décroissante sur I » est :
   A. $\forall\ a, b\ \in I; a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$
   B. $\forall\ a, b\ \in I; a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$
   C. $\exists\ a, b\ \in I; a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$
   D. $\exists\ a, b\ \in I; a \leq b \Longrightarrow f(a) \geq f(b)$

3. L'écriture à l'aide des quantificateurs de la proposition suivante : « tout entier naturel est pair ou impair » est :
   A. $\exists\ n \in \mathbb{N}; n = 2p; p \in \mathbb{N}$
   B. $\forall n \in \mathbb{N}; n = 2p; p \in \mathbb{N}$
   C. $\forall n \in \mathbb{N}; n = 2p\ ou\ n = 2p + 1; p \in \mathbb{N}$
   D. $\exists\ n \in \mathbb{N}; n = 2p\ ou\ n = 2p + 1; p \in \mathbb{N}$

4. Si $f(-1) = 0$ alors :
   A. L'expression de f peut être définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.
   B. L'expression de f peut être définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x$.
   C. L'antécédent de -1 est 0.
   D. L'image de 0 est -1.

5. Soit la proposition suivante : « Si f est une fonction décroissante sur [1 ;3], alors $f(1) \geq f(3)$ ».
   A. Cette proposition est vraie.
   B. Cette proposition est fausse.

6. Soit la proposition suivante : « Si deux polynômes ont les mêmes racines, alors ils sont égaux ».
   A. Cette proposition est vraie.
   B. Cette proposition est fausse.

7. Soit l'équivalence suivante : « $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ».
   A. Cette équivalence est vraie.
   B. Cette équivalence est fausse.

8. On considère les propositions suivantes :
   (P) : « Une diminution de 10 % de mon salaire le diminue de 100 € » ;
   (Q) : « Une diminution de 20 % de mon salaire le diminue de 200 € ».

   A. On a $(P) \Rightarrow (Q)$
   B. On n'a pas $(Q) \Rightarrow (P)$
   C. On n'a pas $(P) \Rightarrow (Q)$

9. Soit l'implication suivante :
   « Si le prix d'un paquet de chips augmente de 5 % alors le prix de 5 paquets de chips (identiques) augmentent de 25 % . »

   A. Cette implication est vraie.
   B. Cette implication est fausse.

10. Soit l'équivalence suivante : $\sqrt{x} + 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = (x-2)^2 \; et \; x \geq 2$.

A. Cette équivalence est vraie.
B. Cette équivalence est fausse.

Réponses :

1. B
2. B
3. C
4. A
5. A
6. B
7. B
8. A
9. B
10. A