Problème 1 *Les drapeaux scandinaves*

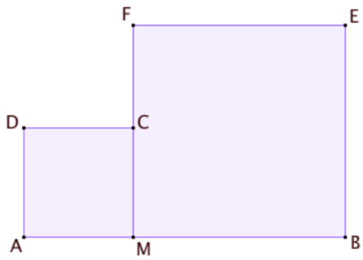
1. On peut assimiler le drapeau suédois à un rectangle de côtés de longueur 8 et de longueur 5 composé d'une croix jaune sur fond bleu.
   On admet que l'aire de la croix jaune est égale aux trois dixièmes de l'aire totale du drapeau.
   Les deux bandes jaunes qui se croisent possèdent la même largeur x.

   a) On cherche la largeur des bandes jaunes. Démontrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 - 13x + 12 = 0$.
   b) Résoudre l'équation et calculer la largeur des bandes jaunes.
2. Le drapeau finlandais peut être assimilé à un rectangle de côtés de longueur 8 et de largeur 5 composé d'une croix bleue sur un fond blanc tel que l'aire de la croix est égale aux trois huitièmes de l'aire totale du drapeau.
   Donner une valeur exacte puis un arrondi au dixième de la largeur des bandes.

Problème 2 *Problème d'aires*

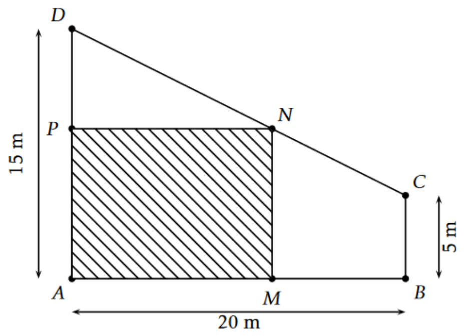
1. Sur un segment [AB] de longueur 10, on place un point M. On construit deux carrés AMCD et MBEF.

   a) On pose $x = AM$.
   Exprimer l'aire des carrés AMCD et MBEF en fonction de x.
   b) Prouver que la somme des aires des carrés s'exprime par la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$.
   c) Exprimer f sous forme canonique.
   d) En déduire la position du point M pour que la somme des aires des deux carrés soit minimum.
2. Obtient-on un résultat analogue en calculant le minimum de la somme des aires de deux disques de diamètres respectifs [AM] et [MB] ?
3. On considère maintenant un carré de côté [AM] et un disque de diamètre [MB].
   Démontrer que la somme des aires du carré et du disque est minimum lorsque le rayon du disque est égal à $\frac{20}{\pi+4}$.

Problème 3 *En architecture*

Un particulier désire construire sa maison sur un terrain qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-dessous par le quadrilatère ABCD tel que AB=20 m, AD=15 m et BC=5 m.
La base de la maison occupe AM en mètres et $A(x)$ l'aire du rectangle AMNP en m^2.



1. Démontrer que $AP = 15 - \frac{1}{2}x$.
2. a) Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle en fonction de x.
   b) Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ?
3. a) Déterminer la forme canonique de $A(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction A.
   b) En déduire l'aire maximale de la surface au sol de cette maison et quelles seraient alors ses dimensions.
4. Déterminer par le calcul les valeurs pour lesquelles l'aire au sol de cette maison serait :
   a) Egale à 100 m^2.
   b) Supérieure ou égale à 110 m^2. (On donnera les valeurs exactes puis des valeurs approchées au dixième.)

Problème 4

On considère l'équation $x^2 + (m-4)x + 4 = 0$: (E_m) où m est un paramètre réel.

1. Déterminer m pour que 1 soit solution de (E_m) et déterminer la 2^{nde} solution.
2. Déterminer m pour que (E_m) admette une unique solution.
3. Déterminer m pour que (E_m) n'admette aucune solution.

Problème 5

Donner tous les triangles rectangles dont les côtés sont des trois entiers naturels consécutifs.

Problème 6

Etudier la position relative de l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ et de la droite D d'équation $y = 2x + 1$.

Indication : Pour étudier la position relative des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$, on étudie le signe de la différence $D(x) = f(x) - g(x)$.

Problème 7

Résoudre $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0$ sur $\mathbb{R}^*$.