Exercice 1

On note f la fonction définie par $f : x \longmapsto \sqrt{8-2x}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Démontre que pour tout $a \in]-\infty; 4]$ et $b \in]-\infty; 4]$ on a :
$$f(a) - f(b) = \frac{2(b-a)}{\sqrt{8-2a} + \sqrt{8-2b}}$$
3. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-\infty; 4]$
4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Exercice 2

Résoudre les (in)équations suivantes:

a. $|x| = -3$ b. $|x| \leq 15$ c. $|x-6| = 2$ d. $|3x+9| = 5$ e. $|x-3| > 0,5$

e. $\sqrt{x-1} = 2$ f. $\sqrt{x} = -3$ g. $\sqrt{x^2+6} = 2x$ h. $\sqrt{x+3} < 3$ i. $\sqrt{x}(x-5) \geq 0$

Exercice 3

En utilisant les fonctions de référence déterminer les variations des fonctions suivantes **après avoir déterminé leur ensemble de définition** :

1. $f(x) = -|x-2|$
2. $g(x) = |x| - \frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $h(x) = -\frac{1}{x} + x$
4. $i(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$
5. $j(x) = -\frac{3}{x^2+1}$
6. *Difficile* $k(x) = \sqrt{\frac{1}{|x+1|} - \frac{1}{2}}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+2}{x-4}$.

Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrer que $f(x) = 2 + \frac{10}{x-4}$.

En déduire les variations de la fonction f.

Exercice 5

On considère un rectangle ABCD tel que AB=3 et AD=2. On place un point M sur le segment [AB] tel que $AM = x$ et un point N sur le segment [BC] tel que $BN = x$.

1. A quel intervalle appartient x ?
2. Calculer la longueur MN en fonction de x ?
3. On désigne par f la fonction qui à tout réel x appartient à [0 ; 2] associe la longueur MN. Etudier les variations de f sur [0 ; 2].
4. Pour quelle valeur de x la longueur MN est-elle minimale ?

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{-4}{x+1}$

1. Étudier les variations de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire les variations de g.

Partie B.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :
   $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
2. En déduire les variations de la fonction f.
3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x+1$. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$.
   (c) Placer les points trouvés à la question 3a et $\mathscr{D}$ dans un repère et tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+5x-4}{x-2}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
   (b) Étudier les variations de $x \mapsto \frac{c}{x-2}$.
   (c) En déduire les variations de f.
2. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = -x+3$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Placer les points et les droites rencontrés dans les questions précédentes dans un même repère et y tracer $\mathscr{C}$.

Exercice 8 *Quelques problèmes…*

1. Etudier la position relative des courbes des deux fonctions suivantes $f : x \mapsto \sqrt{1+2x}$ et $g : x \mapsto 1+x$. *Indication : Penser à la forme conjuguée…*
2. A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n}$? *Justifier*
3. Démontrer que $\sqrt{2} \geq \sqrt{3} - 1$ **sans calculatrice.** *Indication : Développer* $(\sqrt{2}+1)^2$
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\left|\sqrt{4x^2+20x+25} - 7\right| = 3$.
5. On donne la fonction $f : x \mapsto a\sqrt{x+b} + c$ où a, b et c sont des réels fixés. On sait que :
   - le plus grand intervalle sur lequel peut être définie f est $[-3; +\infty[$;
   - la fonction s'annule en 1 ;
   - $f(13) = 1$.

- Déterminer les réels a, b et c.