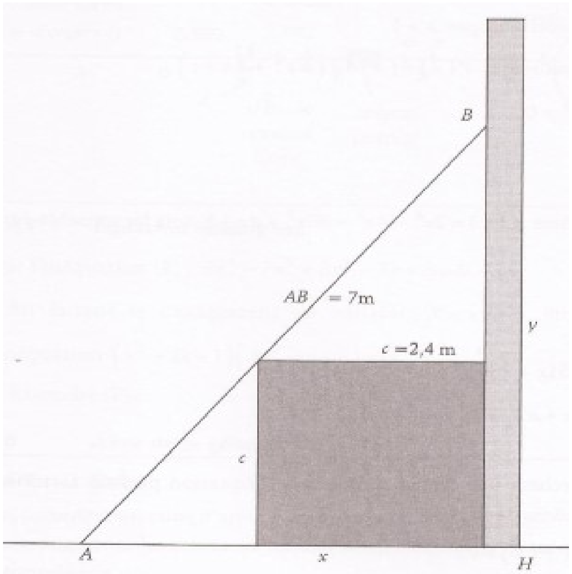
Exercice 1

Une échelle de longueur 7 m s'appuie contre un mur et sur l'arrête d'un bloc cubique de côté 2,4 m. On cherche la distance du pied du mur au pied de l'échelle. On désigne par x cette distance et par y celle du pied du mur au haut de l'échelle.

1. Montrer qu'il faut résoudre le système (1) :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ \dfrac{y - 2{,}4}{y} = \dfrac{2{,}4}{x} \end{cases}$$
2. Montrer que ce système (1) est équivalent au système (2) :
$$\begin{cases} S^2 - 2P = 49 \\ P - 2{,}4S = 0 \end{cases} \text{ où } S = x + y \text{ et } P = xy$$
3. Résoudre (2) puis résoudre (1).



Exercice 2 *Géométrie et 2nd degré*

Dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les points $A(-3\,;\,-2)$; $B(3\,;6)$ et $C(0\,;\,-6)$.

1. Calculer les coordonnées de H : $\overrightarrow{AH} + 3\,\overrightarrow{BH} = \vec{0}$.
2. Justifier que ce point appartient à la droite (AB).
3. Déterminer l'équation de la droite (AB).
4. Donner l'équation du cercle de centre C, passant par le point A. Il recoupe la droite (AB) en K. Calculer les coordonnées du point K.

1. On commence par simplifier l'expression :

   $\overrightarrow{AH} + 3\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AH} = \vec{0}$ ce qui donne alors $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. On remplace par les coordonnées des points et on résout le système : $\begin{cases} x + 3 = \frac{3}{4}(3+3) \\ y + 2 = \frac{3}{4}(6+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 4 \end{cases}$.

   Les coordonnées du point H sont : $\left(\frac{3}{2}\ ;\ 4\right)$.

2. La décomposition précédente, $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, nous permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les points A, B, H sont alignés. Ce qui signifie que le point H appartient à la droite (AB).

3. Pour déterminer l'équation de la droite, on utilise la colinéarité. Ainsi $M(x\,;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires. Comme $\overrightarrow{AM}(x+3\,;y+2)$ et $\overrightarrow{AB}(8\,;\ 6)$, alors $8(x+3) - 6(y+2) = 0$. L'équation de la droite est donc : $4x - 3y + 6 = 0$.

4. Le cercle a pour centre C, donc $a = 0$, et $b = -6$. Le rayon est $CA = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2+6)^2} = \sqrt{25} = 5$. On remplace et on obtient : $x^2 + (y+6)^2 = 25$.

   Pour trouver les coordonnées du second point d'intersection, on résout le système suivant : $\begin{cases} x^2 + (y+6)^2 = 25 \\ 4x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y+6)^2 = 25 \\ x = \frac{3y-6}{4} \end{cases}$.

   On calcule $x^2 = \left(\frac{3y-6}{4}\right)^2$ et on remplace dans l'équation du cercle.

   On obtient alors une équation du second degré en y :

   $$25y^2 + 156y + 212 = 0$$

   On calcule le discriminant, $\Delta = 3136 > 0$, puis les 2 racines qui sont : $y = -2$ et $y = -\frac{106}{25}$.

   On peut ensuite trouver les valeurs de *x* qui correspondent, ainsi si $y = -2$ alors $x = -3$. On retrouve le point *A*. Puis si $y = -\frac{106}{25}$, alors $x = -\frac{117}{25}$. Les coordonnées du point *K* sont : $\left(-\frac{117}{25}\ ;\ -\frac{106}{25}\right)$.