Exercice 1

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et h la fonction définie par $h(x) = x^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})x + b - a$.

1. Vérifier que le discriminant Δ_h de h est donné par $\Delta_h = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(5\sqrt{a} + 3\sqrt{b})$.

2. Justifier que la fonction h est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ et en déduire que, pour tout réel strictement positif c, on a $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \dfrac{b-a}{c} + c$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - 7x + 4}$

2. $g : x \mapsto \sqrt{-2x^2 + 9x - 7}$

3. $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{3x^2 - 7x + 4}{-2x^2 + 9x - 7}}$

Exercice 3

Dans chacune des situations, exprimer $f(x)$ en fonction de x sachant que f désigne une fonction polynôme du second degré et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Situation 1

$\mathscr{P}$ coupe les axes en $A\left(-\dfrac{2}{3}; 0\right)$, $B\,(0; -10)$ et $C\,(5; 0)$.

Situation 2

$\mathscr{P}$ passe par l'origine et son sommet est $S\,(4; 2)$.

Situation 3

$\mathscr{P}$ a pour sommet $E\,(3; 0)$ et coupe la parabole d'équation $y = x^2$ en un point d'abscisse (-3).

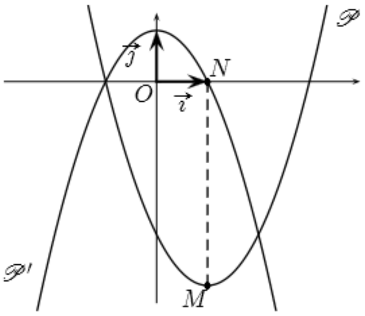
Exercice 4

On cherche quatre entiers consécutifs tels que la somme des cubes de deux d'entre eux égale la somme des cubes des deux autres.

Combien le problème admet-il de solutions ?

Exercice 5

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on considère les deux paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives $y = x^2 - 2x - 3$ et $y = 1 - x^2$.



Pour tout réel t, on note M et N les points d'abscisse t appartenant respectivement à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont exactement deux points en commun, dont on précisera les coordonnées.

Dans la suite, on nomme A et B ces deux points en convenant d'appeler A celui d'abscisse négative.

2. Existe-t-il des valeurs de t pour lesquelles le quadrilatère $ANBM$ est un parallélogramme ?

Si oui, les déterminer toutes.

3. Soit f la fonction qui, à tout réel t, associe la longueur $f(t)$ du segment $[MN]$.