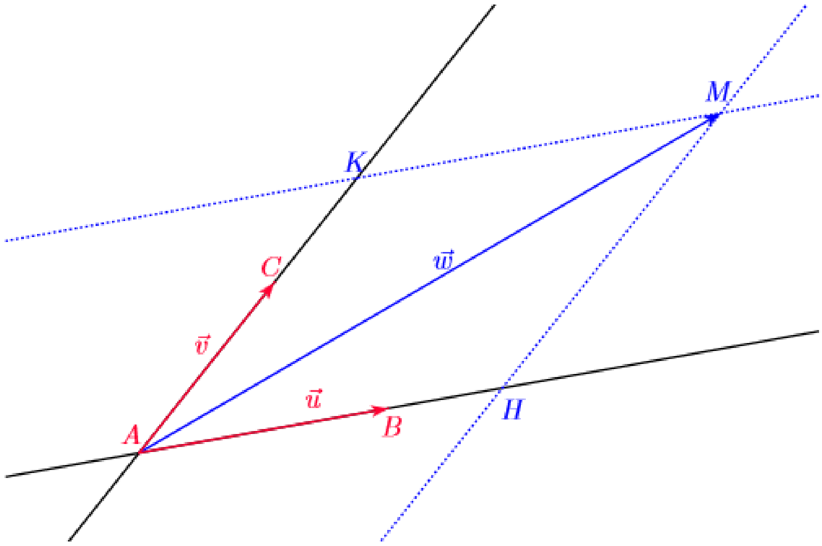
I Décomposition d'un vecteur dans une base

Théorème et définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Alors pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un couple unique de réels $(a\,;b)$ tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

a et b sont appelées coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Figure Soit un point A du plan, les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$.



Exemple Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Exprimer $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{u} = \overrightarrow{AO}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

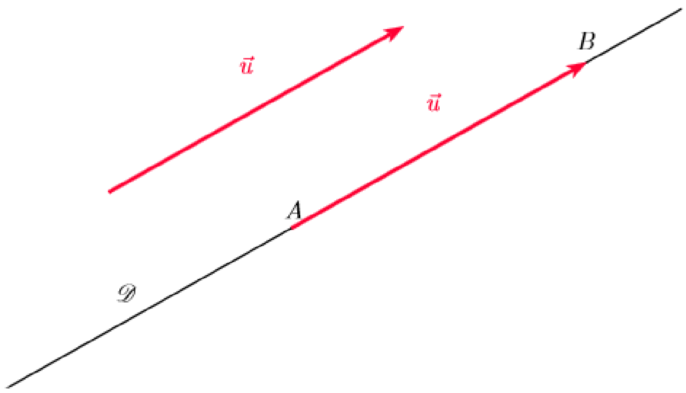
$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{u} + \overrightarrow{DO} = \vec{u} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{u} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

Définition On appelle repère du plan la donnée d'un point O appelée origine et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. On note $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ce repère.
Pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose de manière unique sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
On note $M(x\,;y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II Equations de droites

2.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan et un vecteur $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe deux points A et B de la droite $\mathcal{D}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



Remarques

1. Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. La direction d'un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ définit la direction de $\mathcal{D}$.

Exemple Soit $\mathcal{D} : y = -2x + 1$ passant par les points $A(-1\,;3)$ et $B(1\,;-1)$

$\mathcal{D}$ admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Propriété On peut définir la droite $\mathcal{D}$ par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$:

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\ et\ \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

Remarque Deux droites sécantes ont leurs vecteurs directeurs non colinéaires.

Exemple Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le pont $A(-2\,;3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. Déterminons l'équation de cette droite.

Rédaction type à connaître ! Faire un schéma…

$M(x;y) \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 5(x+2) - 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + 16 = 0$

2.2 Equation cartésienne

Propriété Les coordonnées $(x\,;y)$ de tous les points M d'une droite $\mathcal{D}$ vérifient une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des réels avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ *Non nuls jamais en même temps.*
Une telle équation s'appelle équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Démonstration

Soit $A(x_A; y_A)$ un point de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
$\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ donc $(\alpha;\beta) \neq (0;0)$.
Soit $M(x;y)$ un point du plan.
$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha;\beta)$.
On a donc :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathscr{D} \quad &\Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0 \end{aligned}.$$

Si on pose $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \alpha y_A$, on obtient :

$$M(x;y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

ce qui signifie que $ax + by + c = 0$ est une équation de $\mathscr{D}$.
On a bien $(a;b) \neq (0;0)$.

Remarque Une droite $\mathcal{D}$ admet une infinité d'équations cartésiennes, dont les coefficients sont deux à deux proportionnels.

Exemple Soit $\mathcal{D} : x - y + 1 = 0$ alors l'équation cartésienne : $2x - 2y + 2 = 0$ ou celle-ci : $-x + y - 1 = 0$ définissent la même droite $\mathcal{D}$.

Propriété Soient des réels a, b et c avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$.

Exemple Soit $A(-3\,;2)$ et $B(1\,;\,-1)$. Déterminons l'équation cartésienne de la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) qui admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec : $\begin{cases}-b = 4\\ a = -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = -4\\ a = -3\end{cases}$. Ainsi, (AB) admet une équation cartésienne de la forme : $-3x - 4y + c = 0$ où c reste à déterminer. $A(-3;2) \in (AB)$ soit $-3.(-3) - 4.2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

$(AB) : -3x - 4y - 1 = 0$ ou encore $(AB) : 3x + 4y + 1 = 0$.

2.3 Equation cartésienne et équation réduite

Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

(i) Si $b \neq 0$, on peut ramener l'équation cartésienne à une équation réduite qui sera $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

Exemple Soit d la droite d'équation $4x + 2y - 6 = 0$. Alors, son équation réduite est : $y = -2x + 3$.

(ii) Par contre si $b = 0$, la droite $\mathcal{D}$ aura pour équation réduite $x = -\frac{c}{a}$ qui est de la forme $x = k$. la droite $\mathcal{D}$ est une droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées).

Exemple Soit d la droite d'équation $-\frac{1}{2}x + 4 = 0$. Alors, sont équation réduite est : $x = 8$.

2.4 Position relative

Propriété Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives

$$\mathcal{D}: ax + by + c = 0$$
$$\text{et} \quad \mathcal{D}': a'x + b'y + c' = 0$$

où $(a\,;b)$ et (a', b') sont distinctes du couple $(0\,;0)$.
(i) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.
(ii) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

Remarque Dans le cas (ii), si (a,b,c) et (a',b',c') sont proportionnels alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues. Dans le cas contraire, elles sont strictement parallèles.

Exemple Soient $\mathcal{D} : 2x - 3y + 1 = 0$
$\mathcal{D}': -3x + y + 2 = 0.$
Ces deux droites sont sécantes :
$2.1 - (-3)(-3) = 2 + 9 = 11 \neq 0.$

Déterminons le point d'intersection.

Soit $M(x; y)$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. x et y vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

On obtient $M(1; 1)$.