Exercice 3

1. a) On calcule $(x-1)(x^2-2x-2) = \cdots = x^3-3x^2+2 = P(x)$.
b) Les racines du trinôme x^2-2x-2 sont $1-\sqrt{3}\,, 1+\sqrt{3}$.
On en déduit le tableau de signe complet de $P(x)$:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-1$		-		-		+		+	
x^2-2x-2		+		-		-		+	
$P(x)$		-		+		-		+	

2. a) f est du type u/v on a :
$$f'(x) = \frac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2} = \frac{2P(x)}{(x-2)^2}$$
b) Le signe de $f'(x)$ dépend clairement du signe du polynôme $P(x)$, déjà étudié juste au-dessus.
On en déduit donc immédiatement les variations de f. Soit :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1-\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-		+		-		-		+	
f		↘	-1,39	↗	0	↘		↘	19,39	↗	

3. a) On résout l'équation suivante : $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2P(a)}{(a-2)^2} = 0 \Leftrightarrow P(a) = 0$. Or, on a calculé les racines de P à la question 1.a). Donc : $a \in \{1-\sqrt{3}; 1\,; 1+\sqrt{3}\}$.
b) Déterminons l'équation y de la tangente T au point d'abscisse 0 :
$y = f'(0)(x-0)+f(0) = -2x-1$.

4. a) On calcule : $ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2} = \frac{ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x+(-2c+d)}{x-2}$
En identifiant les coefficients de cette dernière expression avec ceux de f(x), on aboutit au système suivant : $a = 1\ et \begin{cases} -2a+b=0 \\ -2b+c=-3 \\ -2c+d=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b=2 \\ c=1 \\ d=4 \end{cases}$

Donc, on a une nouvelle expression de $f(x)$ qui est : $f(x) = x^2+2x+1+\frac{4}{x-2}$.

b) Pour étudier la position relative de P et de C, on étudie le signe de l'expression
$d(x) = f(x)-g(x)$ soit $d(x) = \frac{4}{x-2}$.
Le signe dépend du dénominateur (qui est une expression de type « affine »).
On a donc :
* Si $x \geq 2$, $f(x) \geq g(x)$ donc C est au-dessus de P sur l'intervalle $[2; +\infty[$
* Si $x \leq 2$, $f(x) \leq g(x)$ donc C est en-dessous de P sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

Exercice 4

1. On a le système suivant : $\begin{cases} P = 2L + 2l = 4 \\ S = L \times l = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L + l = 2 \\ 4L \times l = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 2 - l \\ 4(2 - l)l = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} L = 2 - l \\ -4l^2 + 8l - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 2 - l \\ \Delta = 16, l = \frac{1}{2} \; ou \; l = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \frac{3}{2} \; ou \; L = \frac{1}{2} \\ l = \frac{1}{2} \; ou \; l = \frac{3}{2} \end{cases}$

2. a) D'après ce que l'on vient d'écrire, on a $S = L \times l = (2 - l) \times l$

b) On a $f'(x) = 1 \times (2 - x) + x \times (-1) = 2 - x - x = 2 - 2x$

La racine de f'(x) est 1, on en déduit le tableau complet de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	
f		↗	1	↘	

c) On a $S = f(l)$. L'aire est maximale pour l=1 et ce maximum vaut 1. On a L=2-1=1. C'est donc un carré de côté 1.

Exercice 5

1. On a $A = xy = 392$ d'où $y = \frac{392}{x}$ pour x>0.

2. D'après le schéma, on a $l(x) = 2x + y = 2x + \frac{392}{x} = \frac{2x^2+392}{x}$

3. On a $l'(x) = \frac{4x \times x - 2x^2 - 392}{x^2} = \frac{2x^2 - 392}{x^2}$

Le signe de l'(x) dépend du numérateur. La racine de $2x^2 - 392$ sur $]0; +\infty[$ est 14.

On en déduit le tableau complet de variations de l:

x	0		14		$+\infty$
$l'(x)$		-		+	
l		↘	56	↗	

4. Le minimum est atteint en x=14 et a pour valeur 28.

Les dimensions pour que la clôture ait une longueur minimale est : x=14 m et y =392/14=28 m.